L3 - Rozwiązywanie równań stanu obwodu w Matlabie

1. Formułowanie równań stanu

Opis obwodu nieliniowego w postaci ogólnej

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Opis obwodu liniowego

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

2. Algorytmy rozwiązania równań stanu

Tabela 1 Zestawienie algorytmów całkowania numerycznego w Matlabie [40]

Nazwa funkcji Matlaba	Zastosowany algorytm	Typ równań różniczkowych
ode15s	Klopfensteina	sztywne
ode23	Rungego-Kutty 2/3 rzędu z modyfikacją Bogackiego-Shampine'a	niesztywne
ode45	Rungego-Kutty 4/5 rzędu z modyfikacją Dormanda-Prince'a	niesztywne
ode23s	zmodyfikowany Rosenbrocka	sztywne
ode23t	trapezów	średnio sztywne
ode23tb	modyfikacja algorytmu trapezów i Geara	sztywne
ode113	Bashfortha-Adamsa-Moultona zmiennego rzędu od 1 do 12	niesztywne

Wywołanie rozwiązania:

[t,x]=ode15s('xprim' ,[t0, tmax], x0)

Wielkości *t* , *x* oznaczają zbiór punktów czasowych oraz odpowiadających im rozwiązań **x** w przedziale T=[t_0, t_{max}]. Warunki początkowe zadania definiowane są za pośrednictwem wektora x0. W przykładzie *xprim* oznacza nazwę pliku funkcyjnego definiującego zbiór równań różniczkowych dx/dt=f(t,x).

3. Przykłady

a)Przykład równania o regulowanej sztywności

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1\left(1 - e^{-\lambda_2 t} - x\right)$$

Równanie to posiada dokładne rozwiązanie analityczne wyrażone funkcją

$$x(t) = x(0)e^{-\lambda_1 t} + \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Przyjmując wartości tych stałych różniące się o co najmniej kilka rzędów wielkości mamy do czynienia z równaniem sztywnym. Przy porównywalnych wartościach λ_1 i λ_2 równanie nie ma cech sztywności.

Program główny

```
% Program główny rozwiązania równania sztywnego
clear
x0=1;
[t1,x1]=ode23('stif1', [0:0.01:2],x0);
[t2,x2]=ode23tb('stif1', [0:0.01:2],x0);
subplot(2,1,1), plot(t1,x1,'-',t2,x2,'--'), grid, xlabel('t'), ylabel('x')
subplot(2,1,2), plot(t1,x1-x2,'-'), grid, xlabel('t'), ylabel('x1-x2')
```

Plik funkcyjny

```
% Plik funkcyjny definiujący równanie stanu
function xprim=stif1(t,x)
lambda1=50;  %lambda1=1e7
lambda2=1;
xprim=lambda2*exp(-lambda2*t)+lambda1*(1-exp(-lambda2*t)-x);
```

b)Równanie Van der Pola

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = e\left(1 - x_1^2\right)x_2 - x_1$$

Rozwiązać to równanie dla różnych wartości współczynnika e, na przykład e=0.1, 1, 7, 20.

Plik funkcyjny

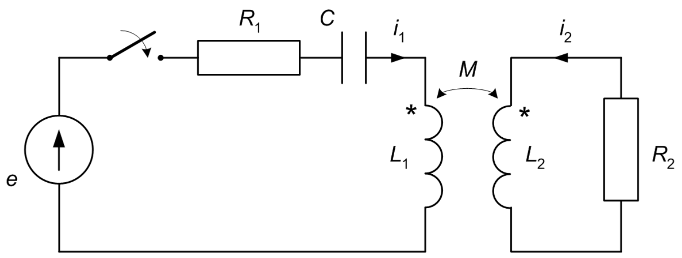
```
% Plik funkcyjny definiujący równania stanu równania van der Pola
function xprim=vdpol(t,x)
% e=1.5;
e=7;
xprim=[ x(2);
       e*(1-x(1)*x(1))*x(2)-x(1)];
```

Program główny (czas T_{max} dobrać w zależności od wartości e)

```
% Program główny rozwiązania równania van der Pola
clear
x0=[0; 0.9];
[t,x]=ode45('vdpol', [0 50],x0);
subplot(2,1,1),plot(t,x(:,1)), grid, xlabel('t'), ylabel('x1')
subplot(2,1,2),plot(t,x(:,2)), grid, xlabel('t'), ylabel('x2')
```

c)Stan nieustalony w obwodzie elektrycznym

Struktura obwodu



Rys. 1 Schemat obwodu elektrycznego w analizie stanu nieustalonego

Równania stanu dla $\mathbf{x}=[i_1, i_2, u_C]^T$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 D L_2}{M} & \frac{R_2 D L_2}{L_2} & -\frac{D L_2}{M} \\ R_1 D & -\frac{R_2 D L_1}{M} & D \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{D L_2}{M} \\ -D \\ 0 \end{bmatrix} e \qquad D = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2}\,.$$

Program główny

```
% Program główny obliczania stanu nieustalonego w RLC
x0=[0;  0; 0];
t0=0; tk=12;
[t,x]=ode45('rlc',[t0,tk],x0);
subplot(2,1,1); plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'--'); grid
```

```
title('Stan nieustalony w RLC - prady')
legend('i1(t)','i2(t)')
subplot(2,1,2); plot(t,x(:,3),'-'); grid
title('Stan nieustalony w RLC - napięcie Uc')
legend('Uc(t)')
```

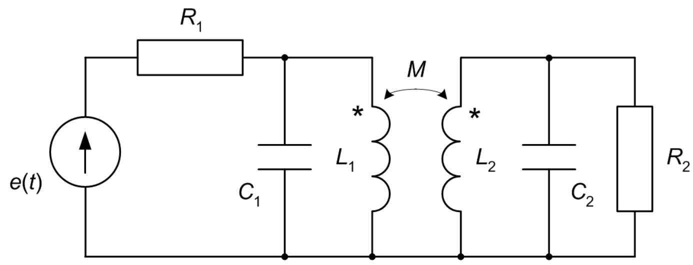
Plik funkcyjny

```
% Funkcja definiująca równanie zmiennych  stanu
function xprim=rlc(t,x)
R1=0.02; R2=0.5; C=0.01; L1=1; L2=1.5; M=1;
e=sin(t);
D=M/(L1*L2-M*M);
A=[-R1*L2*D/M  R2*D         -L2*D/M
    R1*D      -R2*L1*D/M    D
    1/C        0            0];
B=[L2*D/M;  -D; 0];
xprim=A*x+B*e;
```

4. Zadania i problemy

Zadanie 1

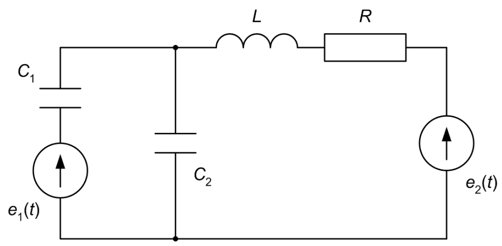
Dla obwodu przedstawionego na rys. Z1 wyznaczyć równania stanu. Dobrać tak wartości elementów, aby otrzymać przypadek oscylacyjny. Przyjąć zerowe warunki początkowe. Rozwiązać równania stanu w przedziale czasowym odpowiadającym stanowi nieustalonemu przy pomocy funkcji całkowania numerycznego. Narysować otrzymany wykres czasowy zmiennych stanu.



Rys. Z1 Schemat obwodu do zadania 1

Zadanie 2

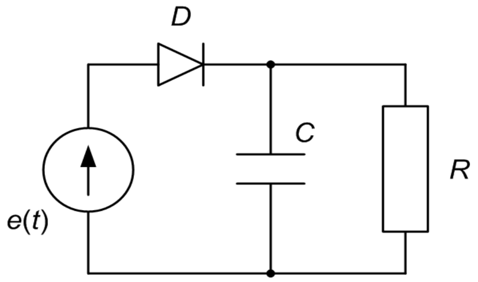
Dla obwodu przedstawionego na rys. Z2 wyznaczyć równanie stanu. Przyjąć zerowe warunki początkowe. Rozwiązać równania stanu w przedziale czasowym odpowiadającym stanowi nieustalonemu przy pomocy funkcji całkowania numerycznego. Narysować otrzymany wykres czasowy zmiennych stanu.



Rys. Z2 Schemat obwodu do zadania 2

Zadanie 3

Napisać równanie stanu dla obwodu RC z diodą złączową (rys.Z3). Wyznaczyć rozwiązanie obwodu przy wymuszeniu sinusoidalnym stosując funkcję całkowania numerycznego. Przyjąć model diody w postaci równania $i_D=10^{-14}\exp(u_D/0.026)$. Przyjąć zerowe warunki początkowe. Narysować przebieg napięcia kondensatora w czasie dla różnych wartości rezystancji R.



Rys. Z3 Schemat obwodu do zadania 3