Laboratorium modelowania i symulacji układów dynamicznych
Zakład Elektrotechniki Teoretycznej i Informatyki Stosowanej
Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Systemów Informacyjno-Pomiarowych, PW

Ćwiczenie Nr 1
BADANIE ALGORYTMÓW CAŁKOWANIA NUMERYCZNEGO
Autor: S. Osowski

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie właściwości i porównanie algorytmów całkowania numerycznego stało-krokowych (ode1, ode2, ode3, ode4, ode5) i zmiennokrokowych (ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb). Badanie dotyczyć będzie wpływu wyboru rodzaju algorytmu i długości minimalnej kroku całkowania na stabilność i dokładność algorytmu przy rozwiązaniu równań różniczkowych, w szczególności sztywnych.

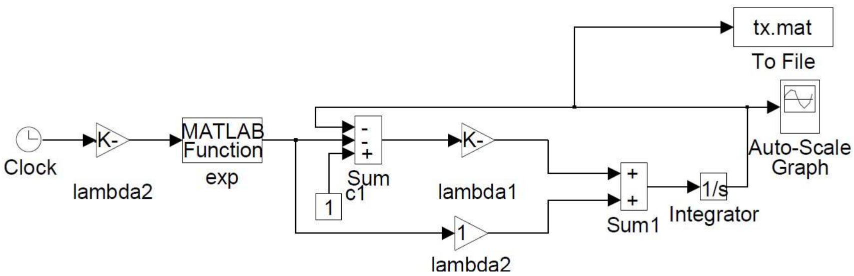
2 Obiekt badan

2.1 Badania porównawcze algorytmów całkowania

Symulacji podlegać będzie obiekt dynamiczny opisany testowym równaniem stanu

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 \left(1 - e^{-\lambda_2 t} - x\right) \qquad (1)$$

Na rys. 1 przedstawiono przykładowy schemat blokowy rozwiązujący to równanie przy wykorzystaniu SIMULINKa.



Rysunek 1: *Model równania różniczkowego w SIMULINKU*

Rozwiązanie w postaci wektora **tx**= [t, x] wysyłane jest (obok wyświetlenia graficznego na *Auto-scale graph*) na plik o zadanej przez użytkownika nazwie, na przykład *tx* z rozszerzeniem *.mat* (dopisywanym automatycznie przez program). Rozwiązanie dokładne tego równania jest znane i opisane zależnością

$$x(t) = x(0)e^{-\lambda_1 t} + \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \qquad (2)$$

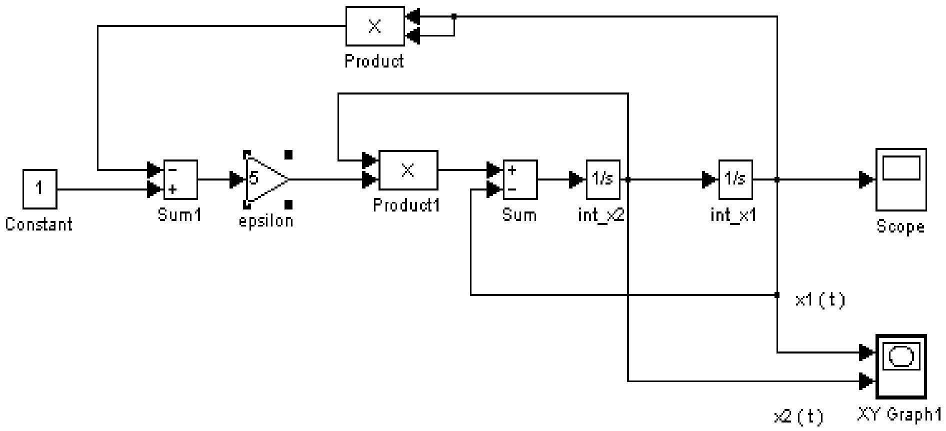
W równaniu tym λ_1 i λ_2 są stałymi czasowymi. Ich wzajemna relacja wyznacza współczynnik *k* sztywności równania różniczkowego (1). Przy dużej wartości *k* równanie różniczkowe staje się sztywne; przy zbliżonych wartościach λ_1 i λ_2 współczynnik *k* przybiera niezbyt dużą wartość i równanie różniczkowe nie odznacza się cechą dużej sztywności.

2.2 Badanie generatora opisanego równaniem van der Pola

Układ generatora na diodzie tunelowej przedstawiony na wykładzie można (przy pewnych uproszczeniach) opisać równaniem van der Pola

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varepsilon\left(1 - x_1^2\right)x_2 - x_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Równanie to można zamodelować w programie Simulink jak to przedstawiono na rys 2.



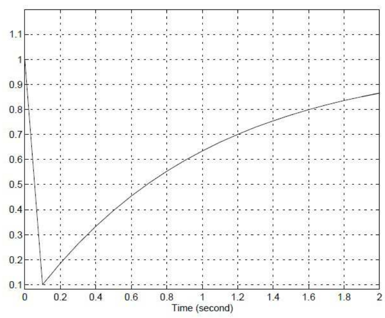
Rysunek 2: *Schemat blokowy w Simulinku odpowiadający równaniu van der Pola*

3 Program badan

Program badań dotyczy rozwiązania dwu różnych równań różniczkowych (1) oraz (3). W części pierwszej dotyczącej równania (1) pierwszym wykorzystując program SIMULINK należy zbadać różne algorytmy przy różnych wartościach λ_1 i λ_2 oraz ustalonej wartości $x(0)=1$. W badaniach można na przykład przyjąć:

$\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$
$\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 1$
$\lambda_1 = 10^4$, $\lambda_2 = 1$
$\lambda_1 = 10^{20}$, $\lambda_2 = 1$

Przykładowe rozwiązanie równania (1) przy k = 10 przedstawione jest na rys. 3.



Rysunek 3: *Przykładowe rozwiązania równania (1) przy k* = 10

W szczególności wykonując ćwiczenie należy:

1. Zbudować model równania różniczkowego (1) w SIMULINKu.
2. Wykorzystując możliwości graficzne SIMULINKa dokonać symulacji rozwiązania numerycznego dla przedstawionych w punkcie 1 algorytmów stało krokowych i zmiennokrokowych dla podanych 4 współczynników sztywności. Ocenić jakość działania poszczególnych algorytmów całkowania dla każdego poziomu współczynnika sztywności.
3. W przypadku algorytmów stało krokowych zbadać wpływ kroku na stabilność algorytmu. Ograniczyć się do jednej wartości $\lambda_1 = 10000$. Wyniki dotyczące maksymalnego kroku całkowania umożliwiającego uzyskanie stabilnego rozwiązania zanotować w tabeli 1.

Tabela 1 Wyniki doboru kroku całkowania algorytmów stałokrokowych równania (1) przy $\lambda_1 = 10000$

Algorytm	Ode1	Ode2	Ode3	Ode4	Ode5	Algorytm najszybszy	Algorytm najwolniejszy
Max. krok całkowania							

4. Zbadać wpływ wybranego algorytmu zmienno krokowego na stabilność oraz efektywność (mierzoną długością czasu uzyskania rozwiązania) rozwiązania dla 4 badanych przypadków sztywności. Wyniki zanotować w tabeli 2 (stabilność : TAK/NIE). ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb

Tabela 2 Wyniki dotyczące stabilności algorytmów zmiennokrokowych dla równania (1)

Algorytm	Ode23	Ode45	Ode113	Ode15s	Ode23s	Ode23t	Ode23tb	Algorytmy niestabilne	Najszybsze algorytmy
Stabilność dla $\lambda_1 = 10$									
Stabilność dla $\lambda_1 = 100$									
Stabilność dla $\lambda_1 = 1e4$									
Stabilność dla $\lambda_1 = 1e20$									

5. Dla 2 algorytmów stało krokowych: ode2 i ode5 o założonym z góry kroku (umożliwiającym stabilne rozwiązanie) i jednego wybranego przypadku sztywności (np. $\lambda_1 = 1000$) wygenerować dane dotyczące rozwiązania numerycznego równania do przestrzeni roboczej MATLABA (lub na plik *tx.mat*) a następnie stablicować rozwiązanie dokładne i porównać je graficznie z uzyskanymi na drodze całkowania numerycznego, wykreślając również błąd rozwiązania w czasie. Wyniki w postaci graficznej i wartości średniej błędu zamieścić w sprawozdaniu.
6. W przypadku równania van der Pola należy zbadać proces wzbudzania sie drgań w generatorze samowzbudnym opisanym równaniem van der Pola wykorzystując również program Simulink (plik **vdpol.m** w katalogu *z* :*kma**spd*). Zastosować wybrany przez siebie algorytm całkowania. W szczególności należy:
   - Zaobserwować drgania samowzbudne dla 4 różnych wartości ε (ε =0.05, ε=1, ε=5, ε=50, ε=100) za każdym razem dobierając odpowiednio długi czas analizy. Zaobserwować przebieg rozwiązania na płaszczyźnie fazowej ($dx_1/dt = f(x_1)$) dla każdego przypadku ε.
   - W tabeli 3 zanotować okres drgań ustalonych dla każdej wartości ε. Zarejestrować rozwiązanie graficzne dla każdej wartości ε dla potrzeb sprawozdania.

Tabela 3 Wartości okresu drgań ustalonych dla różnych wartości ε.

ε	ε =0.05	ε =1	ε =5	ε =50	ε =100
Okres T					

Wyniki zapisane w tabelach należy zaprezentować w formie wykresów.