

Ćwiczenie Nr 6b
Model dynamiczny rozprzestrzeniania się epidemii
Autor: S. Osowski

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z prostym modelem rozprzestrzeniania się epidemii w środowisku ludzkim. Badanie dotyczyć będzie wpływu wyboru różnych parametrów modelu na czas trwania epidemii i przeżywalność ludzi.

2. Obiekt badan

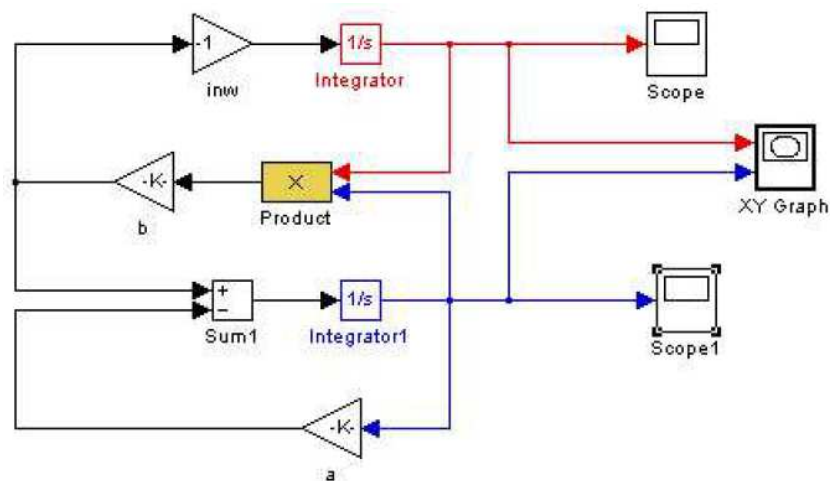
W ramach tej teorii modelowania epidemii zakłada się że istnieją dwie istotne klasy osobników w całej populacji: osobnicy zdrowi, ale wrażliwi na zachorowanie oraz osobnicy zakażeni (chorzy).

Niech $x_1(t)$ oznacza populację osobników zdrowych, ale wrażliwych na zarażenie, natomiast $x_2(t)$ populację osobników już zainfekowanych. Dla uproszczenia zakładać będziemy, że $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są opisane liczbami rzeczywistymi, co można zinterpretować jako pewne przybliżenie liczby całkowitej (przy dużej populacji błąd zaokrąglenia jest zwykle niewielki).

Równania stanu opisujące zmiany obu populacji mają postać

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= bx_2(x_1 - a/b) \end{aligned} \quad (1)$$

Model rozprzestrzeniania się epidemii opisany równaniami stanu (1) można łatwo zaimplementować w Simulinku. Odpowiedni schemat układu blokowego przedstawia rys. 1.



Rysunek 1: Model rozprzestrzeniania się epidemii

3. Program badań

W badaniach symulacyjnych z użyciem Simulinka przyjęto wartości $a = 0.08$, $b = 0.00002$. W badaniach przyjęć różne wartości początkowe zmiennej $x_2(t)$, $x_2(0) = 10, 100, 1000, 2000, 5000, 10000$ przy założeniu, że początkowa populacja $x_1(t)$ jest stała i równa np. 10000 (całkowita populacja badanych osobników jest sumą x_1 i x_2). Niezależnie od punktów startowych stan równowagi wymaga spełnienia warunku $x_{2ust} = 0$, natomiast x_{1ust} może przyjmować różną wartość zależną od warunków początkowych. Poglądowa jest również obserwacja zmian $x_1(t)$ i $x_2(t)$ na płaszczyźnie fazowej opisanej równaniem

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1 - a/b}{x_1} \quad (2)$$

Zanotować w tabeli 1 wartości końcowe ocalałej od choroby populacji x_1 w zależności od warunków początkowych $x_2(0)$.

Tabela 1 Zależność x_{1ust} oraz x_{2max} od warunków początkowych $x_2(0)$ dla $b=0.00002$.

$x_2(0)$.	10	100	1000	2000	5000	10000
x_{1ust}						
x_{2max}						

Powtórzyć badania dla zwiększonej wartości współczynnika $b=0.00003$, przy niezmienionej wartości a . Wyniki zanotować w tabeli 2.

Tabela 2 Zależność x_{1ust} oraz x_{2max} od warunków początkowych $x_2(0)$ dla $b=0.00003$.

$x_2(0)$.	10	100	1000	2000	5000	10000
x_{1ust}						
x_{2max}						

Dla jednej wartości $x_2(0)$ zarejestrować przebiegi $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ w czasie t na płaszczyźnie fazowej. Przeanalizować postać krzywej zmian obu populacji na płaszczyźnie fazowej i związek z przebiegami czasowymi. W sprawozdaniu wykreślić zależność x_{1ust} oraz x_{2max} od początkowej liczby zarażonych dla obu badanych przypadków.

Wyniki zapisane w tabelach należy zaprezentować w formie wykresów.