Rachunek wektorowy (fragmenty z Wikipedii)

Zastosowanie wektorów w matematycznym opisie pola elektromagnetycznego umożliwia przedstawienie równań w postaci bardzo zwięzłej i niezależnej od przyjętego układu współrzędnych.

Wektor

Wektor – w fizyce i technice pojęcie wektora związane jest z wielkością, której można przypisać dość ogólnie rozumianą "wartość" i "kierunek" w przestrzeni, niekoniecznie trójwymiarowej. W matematyce pojęcie to uległo daleko idącej generalizacji i związane jest z pojęciem przestrzeni wektorowej. Ten artykuł omawia rozmaite aspekty pojęcia wektora w przestrzeni trójwymiarowej.

Typowym przykładem wektora jest siła – ma ona zawsze pewną wartość, kierunek i zwrot w przestrzeni trójwymiarowej (liczba wymiarów nie ma tu większego znaczenia), a kilka różnych sił przyłożonych do tego samego obiektu daje w wyniku siłę wypadkową zgodnie z regułą równoległoboku.

Innym przykładem wektora jest prędkość poruszającego się punktu – by określić ją w pełni należy jak poprzednio podać jej wartość (zwaną czasem *szybkością*), kierunek oraz zwrot wektora. Określenie "ucieka z szybkością 180 km/h autostradą A1 w kierunku Gdańska" niesie ze sobą te właśnie informacje – mamy tu wartość (180 km/h), kierunek (autostrada A1) i zwrot (na Gdańsk). Brak którejkolwiek z nich powoduje, że opis ruchu nie jest pełny.

Bardziej formalnie, wektor to wielkość, której współrzędne zmieniają się w określony sposób przy obrót prostokątnego układu współrzędnych.

W języku geometrii różniczkowej wektor jest elementem przestrzeni stycznej do danej rozmaitości różniczkowej w jej danym punkcie.

Uogólnieniem pojęcia wektora jest tensor.

Definicje

Stwierdzenie, że wektor charakteryzuje się wartością, kierunkiem i zwrotem z matematycznego punktu widzenia oznacza, że jego składowe zmieniają się podczas obrotu układu współrzędnych w ten sam sposób jak współrzędne punktów przestrzeni.

Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą obrotu, a $\mathbf{x}$ oznacza współrzędne dowolnego punktu przestrzeni, to w obróconym układzie współrzędnych współrzędne te będą równe $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ – jeśli składowe danej wielkości w "starym" i "nowym" (obróconym) układzie współrzędnych związane są ze sobą analogiczną zależnością $\mathbf{v}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$, to jest ona wektorem.

Ogólniej, wektor jest tensorem kontrawariantnym rzędu jeden.

Przykładami wektorowych wielkości fizycznych są obok prędkości i siły: pęd, przemieszczenie, przyspieszenie, pole elektryczne.

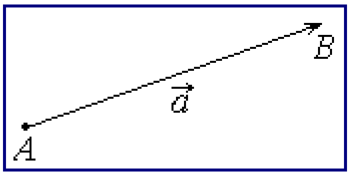
Między wektorami a wielkościami skalarnymi jest wyraźna różnica: wielkości skalarne takie jak odległość, energia, czas, temperatura, ładunek elektryczny, moc, czy masa są w pełni scharakteryzowane przez swoją wartość.

W fizyce oprócz wektorów występują również pseudowektory (lub *wektory osiowe*). Są to wielkości, których składowe podczas obrotów niewłaściwych układu współrzędnych zmieniają znak na przeciwny. Przykładem są tu prędkość kątowa i wszystkie wektory od niej pochodne jak moment siły i moment pędu a także pole magnetyczne. Rozróżnienie na wektory i pseudowektory jest często zaniedbywane – nabiera ono znaczenia dopiero, gdy rozważa się własności symetrii równań opisujących zjawiska. Prostym sposobem odróżnienia wektora od pseudowektora jest przedstawienie wybranego zjawiska w zwierciadle. Wektory odbijają się tak jak obrazy a pseudowektory zmieniają zwrot.

Reprezentacja wektorów

W druku wektory oznacza się najczęściej czcionką pogrubioną: **a**, **b**, ... Inne sposoby oznaczania wektorów to umieszczanie strzałki nad literą $\vec{a}$ lub (rzadziej) podkreślanie: $\underline{a}$; używa się również znaku tyldy pod symbolem. Wartość wektora **a** (odpowiednik długości w matematyce) oznacza się symbolem ||**a**|| i często nazywa jego normą.

Wektory często reprezentuje się graficznie jako strzałki:



Tutaj punkt *A* nazywa się *początkiem* lub *punktem zaczepienia* wektora, natomiast punkt *B* jego *końcem*. Długość strzałki powinna być związana z wartością wektora, a jej kierunek z kierunkiem wektora.

Strzałkę reprezentującą wektor z rysunku powyżej można zapisać jako $\vec{AB}$ lub $\underline{AB}$.

Mimo swej poglądowości, reprezentacja graficzna jest niewygodna jeśli chodzi o działania na wektorach. W *n*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej każdy wektor można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wzajemnie prostopadłych wektorów jednostkowych (tj. od wartości – długości – równej 1). Dla *n*=3 wektory te mają standardowe oznaczenia: wektor jednostkowy równoległy do osi *OX* oznaczamy symbolem **i**, równoległy do osi *OY* symbolem *j*, a równoległy do osi *OZ* symbolem *k*. Zatem, dowolny wektor *a* w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^3 można jednoznacznie zapisać jako:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Liczby rzeczywiste a_l nazywamy współrzędnymi wektora i są one jednoznacznie wyznaczone przez sam wektor **a**, który wobec tego zapisuje się często w postaci kolumnowej:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

lub wierszowej

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Długość wektora

Długość (wartość) wektora **a** = a_1**i** + a_2**j** + a_3**k** to liczba równa:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia Pitagorasa obowiązującego w geometrii euklidesowej.

Wektor zerowy

Dla pełności teorii wygodnie jest przyjąć istnienie tak zwanego *wektora zerowego*. Jest to wektor o nieokreślonym kierunku i zwrocie oraz długości równej 0. Dodanie (lub odjęcie) wektora zerowego do innego wektora nie zmienia tego wektora.

Równość wektorów

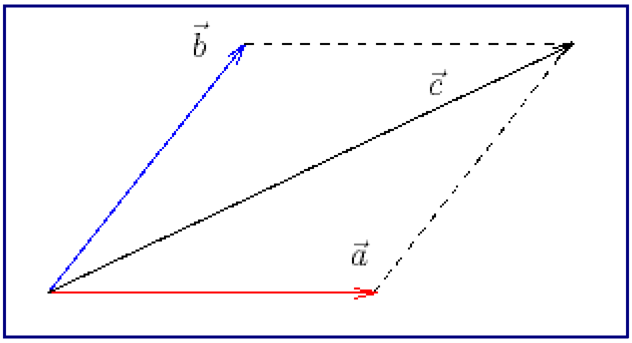
Dwa wektory uznajemy za równe, gdy mają tę samą wartość, kierunek i zwrot. W przypadku wektorów zaczepionych dodatkowym warunkiem jest równość punktów zaczepienia. Dla przykładu, wektory: **i** + 2**j** + 3**k** zaczepiony w punkcie (1,0,0) i **i**+2**j**+3**k** zaczepiony w punkcie (0,1,0) są równe, ale jeśli traktować je jako wektory zaczepione – nie.

Suma i różnica wektorów

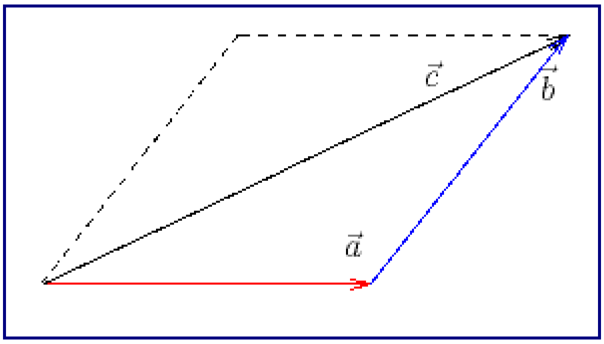
Niech **a**=a_1**i** + a_2**j** + a_3**k** i **b**=b_1**i** + b_2**j** + b_3**k** będą dwoma wektorami. Ich sumę określamy jako:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}$$

Graficzną interpretacją dodawania wektorów jest tak zwana *reguła równoległoboku*:



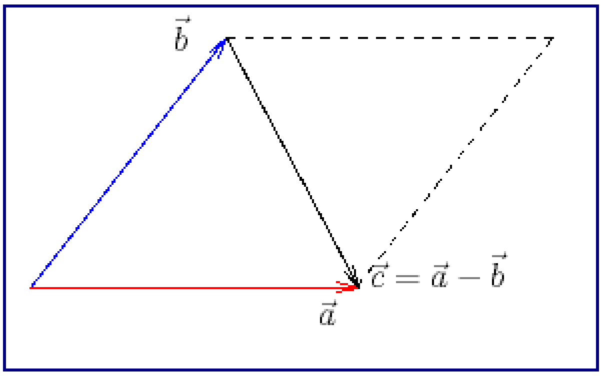
lub *reguła trójkąta*:



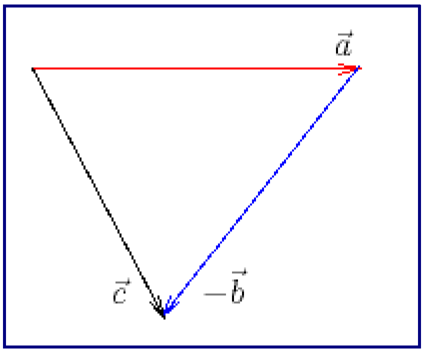
Różnicę wektorów **a** i **b** określamy następująco:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$$

Geometrycznie:



według reguły równoległoboku i



według reguły trójkąta.

Mnożenie przez skalar

Wektor można pomnożyć przez skalar – czyli w naszej sytuacji liczbę rzeczywistą. Jeżeli **a** jest wektorem, a *r* skalarem, to iloczynem *r***a** wektora **a** przez skalar *r* nazywamy wektor:

$$r\mathbf{a} = (ra_1)\mathbf{i} + (ra_2)\mathbf{j} + (ra_3)\mathbf{k}$$

Jego długość równa jest |*r*||**a**|, kierunek taki sam jak kierunek wektora **a**, a zwrot zgodny ze zwrotem **a**, gdy $r>0$ i przeciwny do zwrotu **a**, gdy $r<0$.

Tak określone mnożenie spełnia podstawowe własności algebraiczne – jest między innymi łączne i rozdzielne.

Wersor

Wersorem, albo **wektorem jednostkowym**, nazywamy dowolny wektor o długości równej 1. Z każdym wektorem niezerowym wektorem **a**, można stowarzyszyć pewien wersor, który jest zgodnie z nim skierowany. Mianowicie, łatwo sprawdzić, że wektor:

$$\mathbf{a_u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\mathbf{k}$$

Ma długość jeden i jest skierowany zgodnie z wektorem **a**.

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny wektorów **a** i **b** (zwany czasem *iloczynem wewnętrznym*) jest liczbą, określoną jak następuje:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)$$

gdzie θ jest miarą kąta pomiędzy wektorami **a** i **b = Ax Bx + Ay By + Az Bz**.

Iloczyn skalarny wyrażony przez współrzędne wektorów **a** i **b** wygląda następująco:

Sens geometryczny iloczynu skalarnego jest następujący: jeśli narysować **a** i **b** jako zaczepione w jednym punkcie, to **a·b** jest iloczynem długości wektora **a** i rzutu równoległego wektora **b** na kierunek wektora **a**. Na przykład, w fizyce, praca wykonana nad ciałem przez siłę **F** jest iloczynem skalarnym wektora tej siły i wektora o jaki przesunęła ona ciało.

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy wektorów **a** i **b** (zwany też *iloczynem zewnętrznym*) jest wektorem określonym następująco:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\theta)\mathbf{n}$$

gdzie θ jest miarą kąta między wektorami **a** i **b**, a **n** jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory **a** i **b** oraz skierowanym tak, by orientacja układu wektorów **a**, **b** i **a**×**b** była zgodna z orientacją wersorów osi układu współrzędnych.

W praktyce powszechnie wykorzystuje się układ współrzędnych zorientowany *prawoskrętnie* – oznacza to, że wersory **i**, **j**, **k** osi układu skierowane są zgodnie z kierunkami wyznaczonymi przez kciuk, palec wskazujący i palec środkowy (w tej właśnie kolejności) prawej dłoni. Chcąc zatem wyznaczyć kierunek iloczynu **a**×**b** należy ustawić kciuk zgodnie z kierunkiem wektora **a** i palec wskazujący zgodnie z kierunkiem wektora **b**, a wówczas palec **środkowy** wskaże kierunek wektora **a**×**b**. Zauważmy, że tak określony iloczyn wektorowy *nie jest przemienny*, to znaczy mnożąc **b** przez **a** otrzymamy inny wynik! Dokładniej,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Wynika stąd, że **a**×**b** jest pseudowektorem.

Geometrycznie długość wektora **a**×**b** można interpretować jako pole równoległoboku rozpiętego na wektorach **a** i **b**.

Podane tu określenie iloczynu wektorowego ma sens jedynie w geometrii trójwymiarowej, choć daje się uogólnić na więcej wymiarów.

Iloczyn mieszany wektorów

Iloczyn mieszany jest działaniem, które trójce wektorów **a**, **b**, **c** przypisuje liczbę oznaczaną **(abc)** i określoną następująco:

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Główne zastosowania iloczynu mieszanego są trojakie. Przede wszystkim, wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wyraża objętość równoległościanu rozpiętego na danych wektorach. Dalej, iloczyn mieszany trzech wektorów jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te są liniowo zależne. I wreszcie, iloczyn mieszany jest liczbą dodatnią, wtedy i tylko wtedy, gdy trójka wektorów zorientowana jest zgodnie z trójką wersorów **i**, **j**, **k** osi układu współrzędnych.

Jeżeli wektory **a**, **b**, **c** dane są przez swoje współrzędne w postaci kolumnowej, to iloczyn mieszany tych wektorów równy jest wyznacznikowi macierzy kwadratowej utworzonej z wektorów.

Rotacja

Formalna definicja rotacji wyraża się następująco

$$rot\,\vec{F} = lim_{r\to 0}\frac{\int_{S(r)}\vec{n}\times\vec{F}\,dS}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$ w 2D (jedna składowa): $$\vec{1}_u rot\,\vec{F} = lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot dl}{S}$$ gdzie

krzywa *C* ogranicza powierzchnię *S* na płaszczyźnie prostopadłej do kierunku *u*.

Rotacja jest miarą „wirowości" pola wektorowego, pole o zerowej rotacji nazywamy „potencjalnym". Pole potencjalne może być opisane za pomocą f. skalarnej (potencjału skalarnego), którego gradientem jest pole $\vec{F}$. Praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi.

Dywergencja

Formalna definicja dywergencji wyraża się następująco

$$d\,iv\,\vec{F} = lim_{r\to 0}\frac{\int_{S(r)}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Dywergencja jest miarą „źródłowości" pola. Dodatnia wartość dywergencji w danym punkcie oznacza występowanie tam źródła pola. Ujemna wartość to odpowiednik „odpływu" (możemy wyobrażać sobie, że pole *F* jest polem prędkości cieczy)

Nabla - operator różniczkowy traktowany w operacjach rachunkowych jak symboliczny wektor. Pozwala zapisać operacje różniczkowe na funkcjach w prostej i zwartej formie działań wektorów.

W trójwymiarowym, kartezjańskim układzie współrzędnych:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

dokładniej:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

gdzie $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ to wektory bazowe czyli wektory jednostkowe (wersory) o kierunkach i zwrotach zgodnych z kolejnymi osiami (X,Y, Z) układu współrzędnych w $\mathbf{R}^3$.

Operator nabla może być uogólniony na *n*-wymiarową przestrzeń euklidesową $\mathbf{R}^n$. W kartezjańskim układzie współrzędnych ze współrzędnymi (x_1, x_2, ..., x_n), nabla jest określona:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gdzie $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ wersory bazowe układu współrzędnych.

Działanie operatora nabla na

Pole skalarne

Operator nabla działając na funkcję skalarną określoną w przestrzeni (pole skalarne) f tworzy pole wektorowe $\mathbf{W}$. Wyrażenie to jest zapisywane i postrzegane jako iloczyn wektora przez liczbę, wynikiem tego działania jest wektor. Czyli:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

$$\nabla f = \mathbf{W}$$

Operator ten to gradient.

Pole wektorowe

Operator nabla może być użyty też na funkcji wektorowej czyli na polu wektorowym, tworząc pole tensorowe (tensor), pole wektorowe lub pole skalarne. Operacje te zapisuje się symbolicznie jako odpowiednie działania na symbolicznym wektorze nabla i wektorze pola: iloczyn tensorowy, iloczyn wektorowy i iloczyn skalarny wektorów.

Iloczyn tensorowy operatora i wektora pola *v* zapisywany jest jako $\nabla \otimes v$ i reprezentuje iloczyn diadyczny.

Iloczyn wektorowy operatora i wektora pola zapisywany jest jako $\nabla \times v$ i odpowiada rotacji:

$$\nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

Iloczyn skalarny operatora i wektora pola zapisywany jest jako $\nabla \cdot v$ i odpowiada dywergencji:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Dwukrotne działanie operatora

Dla pola skalarnego *f*, wynikiem działania operatora różniczkowego jest wektor ∇f i jest tylko jedna postać tego pola. Otrzymane pole wektorowe można poddać działaniu operatora uzyskując 3 możliwości.

Dla wektorów nie wszystkie drugie różniczki mają znaczenie praktyczne, dlatego zdefiniowano tylko 6 drugich różniczek pola wektorowego

W tabelce przedstawiono zapis dwukrotnego działania operatora na pole skalarne i wektorowe

Dla pola skalarnego *f*		
$\nabla \cdot \nabla f$	$\nabla \times \nabla f$	$\nabla \otimes \nabla f$
Dla pola wektorowego *v*		
$\nabla \cdot \nabla \times v$	$\nabla \times \nabla \times v$	$\nabla \otimes \nabla \times v$
$\nabla(\nabla \cdot v)$	$\nabla \cdot \nabla \otimes v$	$\nabla \otimes \nabla \otimes v$

Przy czym zachodzą prawidłowości odpowiadające:

$\nabla \times \nabla f = 0$ - oznacza rotacja pola dla którego istnieje pole skalarne (potencjalne) jest równa zero,

$$\nabla \cdot \nabla \times v = 0$$

Oraz:

$$\nabla \cdot \nabla \otimes v = \nabla(\nabla \cdot v)$$

Pozostaje tylko 6 nietrywialnych drugich pochodnych odpowiadają one operacjom:

$\nabla \cdot \nabla f$	$\nabla \otimes \nabla f$	$\nabla(\nabla \cdot v)$
$\nabla \times \nabla \times v$	$\nabla \otimes \nabla \times v$	$\nabla \otimes \nabla \otimes v$

W celu uproszczenia zapisu stosuje się notację:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f$$

Operator Δf to laplasjan najważniejszy z operatorów drugiego stopnia.

Dla pól zachowawczych (potencjalnych) macierz $\nabla \otimes \nabla f$ jest macierzą symetryczną, więc jest to macierz hermitowska. (Macierze hermitowskie mają rzeczywiste wartości własne.)

Dla podwójnego iloczynu wektorowego zachodzi:

$$\nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2 v.$$

Definicja

Gradient – to operator różniczkowy, który działając na pole skalarne, tworzy pole wektorowe. Utworzone pole wektorowe ma kierunek i zwrot największego wzrostu funkcji w danym punkcie, a wartość jest proporcjonalna od szybkości wzrostu (wzrost na jednostkę długości) funkcji. Gradient określony na polu wektorowym daje pole tensorowe.

Gradient oznaczany jest ‘grad’ lub odwróconym trójkątem (operator nabla): ∇ zwanym **nabla**.

Przykład: Rozpatrzmy funkcję „stopień zaciemnienia” określającą jasność punktu w zadanym obszarze (każdemu punktowi przyporządkowano liczbę więc funkcja jest skalarna). Operator gradient przypisuje każdemu punktowi tego obszaru wektor wskazujący kierunek najszybszego wzrostu zaciemnienia obszaru. Wektory przedstawione na grafikach są ilustracją tego pola wektorowego.

Pole skalarne to funkcja, która w każdym punkcie przestrzeni na której jest określone ma przypisaną wartość (liczbę) pewnej wielkości skalarnej *f*.

W układzie współrzędnych kartezjańskich wektor gradientu jest określony jako:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

lub inaczej

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

gdzie $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ są wersorami osi kartezjańskiego układu współrzędnych.

Przykład

Gradient funkcji φ = 2*x* + 3*y*^{2} − *sin*(*z*) jest:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(2, 6y, -cos(z)\right).$$

Własności

Własności wektora **gradientu** pola skalarnego :

- kierunek i zwrot wektora gradientu wskazuje kierunek, w którym dana wielkość *f* pola skalarnego rośnie najszybciej,
- długość wektora (wartość/moduł wektora) gradientu określa szybkość wzrostu (przyrost na jednostkę długości) badanej wielkości w kierunku określonym przez gradient,
- wartość gradientu jest równa pochodnej kierunkowej dla kierunku największego wzrostu, czyli określa największy wzrost wielkości skalarnej.

Rotacja

operator różniczkowy działający na funkcję wektorową $\mathbf{A}$. Formalnie jest iloczynem wektorowym operatora nabla i wektora $\mathbf{A}$.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right].$$

Jeżeli rotacja danego pola wektorowego jest równa zero (jest wektorem zerowym), to mówimy, że pole to jest bezwirowe. Pole bezwirowe posiada potencjał (i odwrotnie: pole posiadające potencjał jest polem bezwirowym).

Dywergencja

Dywergencja, (źródłowość, rozbieżność) jest operatorem różniczkowym, który danemu polu wektorowemu przypisuje pole skalarne.

Jeżeli polem wektorowym jest pole prędkości płynięcia nieściśliwego płynu, to dywergencja większa od zera oznacza, że w tym punkcie do układu dopływa ciecz (jest źródło), jeśli mniejsza od zera to jest odpływ (ujście), a gdy jest równa 0, to w danym punkcie nie ma dopływu, lub jest on równoważony z odpływem.

W przypadku pola elektrycznego takimi "źródłami" pola są ładunki dlatego dywergencja pola elektrycznego jest proporcjonalna do gęstości ładunku w danym punkcie przestrzeni (różniczkowe prawo Gaussa).

Pole wektorowe o zerowej dywergencji nazywamy bezźródłowym. Przykładem takiego pola jest pole magnetyczne (brak ładunków magnetycznych).

Definicja

Funkcję:

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Będziemy nazywać **polem wektorowym** w przestrzeni trójwymiarowej. Dalej będziemy zakładać że powyższa funkcja **jest różniczkowalna** w całej swej dziedzinie. (dzięki temu mamy pewność o istnieniu pochodnych cząstkowych).

Dywergencja pola wektorowego $\mathbf{A}$ jest skalarnym operatorem różniczkowym, określonym następującą formułą:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{|S| \to 0} \frac{\iint_S \mathbf{A} d\mathbf{S}}{|S|}$$

Gdzie $S \subset \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią, a |S| oznacza pole powierzchni S.

Całka podwójna występująca w definicji nosi nazwę strumienia pola wektorowego $\mathbf{A}$ po powierzchni S.

Własności

Powyższa definicja stanowi, iż dywergencja pola wektorowego jest $\mathbf{A}$ operatorem przekształcającym $\mathbf{A}$ w pewne pole skalarne α. Przy czym $\alpha(x,y,z)$ oznacza **strumień przypadający na jednostkę powierzchni** w punkcie (x, y, z).

Można udowodnić, że przy powyższych założeniach dotyczących pola $\mathbf{A}$ (różniczkowalność) dywergencja jest określona w całej dziedzinie pola $\mathbf{A}$. Przy czym można ją obliczyć korzystając ze wzoru

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Gdzie A_x oznacza składową wektora A w kierunku x, A_y składową wektora $\mathbf{A}$ w kierunku y, itp.

W przypadku gdy pole wektorowe określamy korzystając z kartezjańskiego układu współrzędnych można zdefiniować operator wektorowo-różniczkowy zwany operatorem Hamiltona (lub operatorem nabla):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z$$

gdzie $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ są to pola wektorowe, zwane wersorami układu współrzędnych kartezjańskich, określone w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &\ni (x,y,z) \to \mathbf{i}_x = (1,0,0)\\
\mathbb{R}^3 &\ni (x,y,z) \to \mathbf{i}_y = (0,1,0)\\
\mathbb{R}^3 &\ni (x,y,z) \to \mathbf{i}_z = (0,0,1)
\end{aligned}$$

Co zapisuje się jako formalny iloczyn skalarny operatora Hamiltona i pola $\mathbf{A}$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}$$

W układach innych niż kartezjański nie ma formalnej definicji operatora Hamiltona! Przy czym słuszny jest następujący wzór (dla układów współrzędnych ortogonalnych):

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial x} + \frac{\partial(A_2h_1h_3)}{\partial y} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial z}\right)$$

Gdzie h_1,h_2,h_3 są to pola skalarne związane z układem współrzędnych, zwane współczynnikami Lamego (współczynnikami metryki) Przykładowo w układzie kartezjańskim są to stałe pola równe 1 na całej dziedzinie.

Operator Laplace'a

Operator Laplace'a (laplasjan) jest operatorem różniczkowym pojawiającym się w mechanice kwantowej w hamiltonianie oraz jako przestrzenna składowa operatora d'Alemberta. W działaniu na funkcję skalarną f operator Laplace'a jest tożsamy z zadziałaniem operatorów gradientu i dywergencji w tej kolejności.

$$\triangle f = div\ \overline{grad}\ f$$

W układzie kartezjańskim operator Laplace'a ma postać:

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Operator Laplace'a w dowolnym n-wymiarowym krzywoliniowym układzie współrzędnych:

$$\triangle = \frac{1}{h_1 ... h_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{h_1 ... h_n}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

Gdzie: q_i - i-ta współrzędna, h_i - współczynniki Lamego, $h_i = (g_{ii})^{1/2,}$ g_{ii} to diagonalne wyrazy tensora metrycznego.

Operator Laplace'a na funkcję skalarną działa dokładnie tak jak można się spodziewać, tzn. daje sumę pochodnych cząstkowych argumentu. Dla funkcji wektorowej $\bar{F}$ natomiast działanie jest następujące:

$$\triangle \bar{F} = \sum_{k=1}^{n} (\triangle F_k) \hat{e}_k$$

Czyli też jest funkcją wektorową.

Twierdzenie Stokesa

Twierdzenie Stokesa - cyrkulacja pola po konturze zamkniętym K jest równa strumieniowi rotacji pola przez dowolną powierzchnię ograniczoną tym konturem.

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n}\, ds$$

Całka krzywoliniowa skierowana wzdłuż krzywej gładkiej przestrzennej zamkniętej równa się strumieniowi z rotacji przez dowolna powierzchnie gładką S ograniczoną krzywą L, przy założeniu, że zwrot obiegu po krzywej i strona powierzchni są zgodne oraz funkcje zadające pole wektorowe A są klasy C^1 w pewnym obszarze przestrzennym zawierającym powierzchnię S i jej brzeg L.

Można to twierdzenie traktować jako uogólnienie wzoru Greena na przypadek krzywych przestrzennych i płatów powierzchniowych

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa

Niech $V \in \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym powierzchnią zamkniętą S, a P(x, y, z), Q(x, y, z) i R(x, y, z) będą funkcjami posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze V. Prawdziwa jest wówczas następująca zależność:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

Przy czym całka po lewej stronie jest po zewnętrznej stronie powierzchni S.

Uwagi Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa często zapisujemy w postaci wektorowej:

Niech **A** będzie polem wektorowym, dla którego istnieje dywergencja na całym obszarze V:

$$\iint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{div}\mathbf{A} dxdydz$$

Zaletą wzoru zapisanego w ten sposób jest jego zwięzłość.

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa umożliwia nam zamianę całki powierzchniowej na objętościową (potrójną) i na odwrót, w zależności od potrzeb. Stosowane jest również często w elektrodynamice teoretycznej.