

Elektrostatyka

Równania Maxwella redukują się w przypadku statycznego pola elektrycznego do postaci:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E}\end{aligned}$$

Źródłem pola elektrycznego są ładunki, które mogą być:

- punktowe q [C]
- liniowe τ [C/m]
- powierzchniowe σ [C/m²]
- objętościowe ρ [C/m³]

Prawo Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{1}_R$$

Dwa ładunki oddziałują na siebie siłą proporcjonalną do ich wielkości i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi. Stała $1/(4\pi\epsilon)$ dotyczy układu jednostek SI - w innych układach jednostek jest inna.

Przenikalność elektryczna charakteryzuje własności środowiska. W próżni: $\epsilon_0 = 8.8541878 \cdot 10^{-12}$ [F/m]

Dobre przybliżenie to $1/(36\pi) \cdot 10^{-9}$

Natężenie pola elektrycznego

Jest to pole wektorowe określające zdolność do wywierania siły na ładunek. Natężenie pola zależy tylko od ładunków-źródeł (przy założeniu, że ładunek, na który pole działa jest pomijalny w porównaniu ze źródłami pola). Natężenie oznaczamy przez \vec{E}

Natężenie pola od ładunku punktowego q

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^2} \vec{1}_R$$

Natężenie pola od bardziej złożonych źródeł obliczamy metodą superpozycji (o ile środowisko jest liniowe – ale przeważnie można tak przyjąć).

Na przykład w razie ładunku objętościowego rozłożonego z gęstością ρ w obszarze V

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|^2} dV(\mathbf{r})$$

Skalarny potencjał elektryczny

Z algebry wektorów wynika, że jeśli pole wektorowe jest bezwirowe, to można je wyrazić jako gradient pola skalarnego

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$$

Znak „minus” w powyższym równaniu wprowadza się, gdyż, jak pokażemy dalej, potencjał skalarny jest związany z energią w polu elektrycznym, a energia to praca. Przyjęcie, że gradient (a więc kierunek wzrostu potencjału) jest skierowany przeciwnie niż natężenie pola (które jest skierowane tak, jak siła pola działająca na ładunek próbny) powoduje, że praca wykonana „przeciw” siłom pola (a więc przez siły zewnętrzne) będzie ujemna, a praca wykonana „przez pole”

– dodatnia.

Potencjał nie jest jednoznacznie zdefiniowany przez powyższe równanie, gdyż mówi ono jedynie, że natężenie pola (wielkość fizyczna) jest pochodną potencjału – a operacja różniczkowania powoduje pominięcie składników stałych. Tak więc dwa różne potencjały:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą, dadzą identyczne natężenie pola elektrycznego.

Jeżeli przyjmujemy, że w co najmniej jednym punkcie potencjał ma określona wartość (np. 0), to potencjał jest określony jednoznacznie. Punkt możemy wybrać dowolnie – tak, aby było wygodnie potencjał obliczać. Wybrany potencjał nazywamy *potencjałem odniesienia*.

Wielkością fizyczną jest więc nie potencjał, ale różnica potencjałów

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\nabla \varphi \cdot d\vec{l} = U_A - U_B$$

(Pole \vec{E} jest bezwzględnie, czyli

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \equiv \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

a więc całka po dowolnej krzywej łączącej punkty A i B będzie miała tę samą wartość).

\vec{E} można uważać za miarę siły (zgodnie z definicją jest to siła działająca na jednostkowy ładunek), a więc napięcie jest miarą pracy:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(U_A - U_B)$$

Matematyczny opis pola elektrycznego

Prawo Gaussa w postaci całkowej i różniczkowej

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \equiv \quad \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \iiint_V \rho dV = Q$$

Pamiętając o twierdzeniu Ostrogradskiego-Gaussa

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

otrzymamy

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

To ostatnie równanie wykorzystuje się do analitycznego wyznaczania pola w układach o symetrii osiowej lub kulistej. Pokażemy to w dalszej części wykładu.

Wykorzystując definicję potencjału skalarnego i prawo Gaussa w postaci różniczkowej otrzymamy

$$\nabla \cdot (\epsilon \cdot (-\nabla \varphi)) = \rho \quad \rightarrow \quad -\nabla \cdot (\epsilon \cdot \nabla \varphi) = \rho$$

Jeśli obszar jest jednorodny to

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Równanie to nazywamy równaniem Poissona lub, jeśli $\rho = 0$ - równaniem Laplace'a.

W kartezjańskim układzie współrzędnych równanie Poissona zapisujemy w postaci:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Pole w dielektrykach

Dielektryki to materiały, w których nie występują swobodne ładunki elektryczne.

Wyróżnia się dwa rodzaje dielektryków:

- niepolarne: cząsteczki tych dielektryków są symetryczne ze względu na rozkład ładunku i w przestrzeni wolnej od pola elektrycznego nie tworzą dipoli, ale po umieszczeniu w

zewnętrznym polu elektrycznym ładunki przemieszczają się i cząsteczki stają się dipolami;

- polarne: niesymetryczne elektrycznie cząsteczki są naturalnymi dipolami elektrycznymi.

Po umieszczeniu go w polu elektrycznym dipole (zarówno samoistne, jak i zaindukowane) ustawiają się równoległe do wektora natężenia pola elektrycznego i wytwarzają pole skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego.

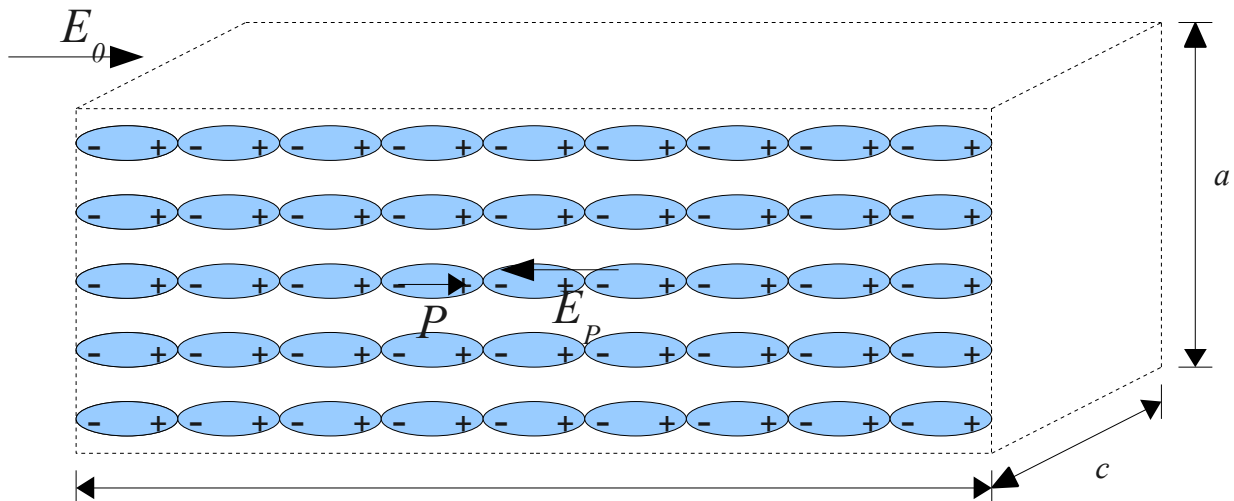
Aby ilościowo opisać zachowanie się dielektryka, wprowadza się wektor polaryzacji dielektrycznej:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V},$$

gdzie V to objętość bardzo małej przestrzeni dielektryka ($V \rightarrow 0$), w której znajduje się N dipoli o momentach \vec{p}_i . Momentem dipola złożonego z dwóch ładunków ($+q$ i $-q$) umieszczonych w odległości d nazywamy wektor $\vec{p} = q\vec{d}$, przy czym wektor skierowany jest od ładunku dodatniego do ujemnego.

Wektor polaryzacji jest skierowany przeciwnie do zewnętrznego (wymuszającego) pola elektrycznego, a więc wypadkowe pole w dielektryku jest mniejsze (dielektryk osłabia pole).

Rozkład ładunku (dipoli) w prostopadłościennym dielektryku umieszczonym równoległe do zewnętrznego pola wymuszającego można wyobrazić sobie w następujący sposób:



Widać, że wewnątrz dielektryka ładunki sąsiadnych dipoli kompensują się i pozostają jedynie nieskompensowane ładunki na zewnętrznych powierzchniach dielektryka. Jeżeli założymy, że prostopadłościan dielektryczny ma wymiary $a \times b \times c$, przy czym bok b jest równoległy do kierunku pola, to wzór definiujący wektor polaryzacji można przekształcić następująco:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V} = \frac{Q_p b}{a \cdot b \cdot c} = \frac{Q_p}{S} \cdot \vec{1}_b.$$

gdzie Q_p to całkowity ładunek na ścianie $a \times c$ (prostopadłej do kierunku pola), a $S = ac$ to powierzchnia tej ściany.

Z powyższych rozważań wynika, że prostopadłościan dielektryka można zastąpić dwiema naładowanymi płaszczyznami, na których gęstość ładunku wynosi $\pm \frac{Q_p}{S} = \pm \sigma_p$ [C/m^2].

W takim układzie pomiędzy płaszczyznami występuje pole od indukowanych ładunków

$$\vec{D}_p = \epsilon_0 \vec{E}_p = -\vec{P}$$

skierowane przeciwnie, niż pole wymuszające polaryzację. Pole wypadkowe możemy wyznaczyć jako

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p,$$

a wektor polaryzacji jako

$$\vec{P} = -\vec{D}_p = -\epsilon_0 \vec{E}_p = -\epsilon_0 (\vec{E} - \vec{E}_0)$$

Indukcja elektryczna w dielektryku jest więc równa

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

Pole w przewodnikach

W przewodnikach istnieją swobodne ładunki elektryczne. Pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego ładunki te będą się przemieszczać, aż do momentu, w którym wytworzone przez nie pole skompensuje pole wymuszające. Aby skompensować to pole, ładunek musi się przemieścić na powierzchnię przewodnika (podobnie, jak w przypadku dielektryków, ale tam ładunek nie mógł się przemieszczać swobodnie, więc kompensował pole tylko do pewnego stopnia).

Zachowanie się ładunku można opisać dwoma równaniami:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}.\end{aligned}$$

Podstawiając $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ otrzymamy:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \text{co po przyrównaniu stronami i uporządkowaniu prowadzi do}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon}},$$

gdzie $\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$ nazywamy stałą relaksacji.

Po czasie τ wartość ρ w dowolnym punkcie jest e=2.71828182845904523536 razy mniejsza, niż wartość początkowa. Po czasie 5τ wartość spada poniżej 1% (dokładnie 0.00673794699908546709).

Wartość stałej relaksacji zależy od rodzaju materiału i np. dla miedzi ($\gamma = 56 \cdot 10^6$, $\epsilon = 8.85 \cdot 10^{-12}$)
 $\tau \approx 16 \cdot 10^{-20}$ s.

Wektory na granicy środowisk

Zastosowanie prawa Gaussa dla nieskończonego małego cylindra umieszczonego na granicy dwóch środowisk pozwala wyprowadzić zależność

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma,$$

gdzie σ jest powierzchniową gęstością ładunku na granicy środowisk.

Zastosowanie warunku bezwirowości natężenia pola elektrycznego wzdłuż nieskończonego małego krzywej na granicy dwóch środowisk prowadzi do zależności

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$

Z powyższych warunków i założenia, że pole elektryczne w przewodniku jest równe zero można wyprowadzić warunki zachowania się wektorów na pow. przewodnika:

$$\begin{aligned}E_{\tau} &= 0 \\ D_n &= \sigma\end{aligned}$$

Linie sił pola elektrycznego wchodzą w powierzchnię dielektryka pod kątem prostym. Powierzchnia dielektryka jest powierzchnią ekwipotencjalną. Całe wnętrze dielektryka ma stały potencjał.

Wyznaczanie pola elektrycznego

1. Wyznaczanie natężenia pola przez superpozycję źródeł
 Wykorzystujemy, zależności

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^2} \mathbf{1}_R, \quad \vec{E}_w = \sum_i \vec{E}_i \quad \text{lub} \quad \vec{E}_w = \int_{V_s} \vec{E}(r) dV$$

Podstawowym ograniczeniem zakresu stosowalności tej metody jest postulat jednorodności środowiska. Jeżeli w obszarze istnieją wtrącenia o innej przenikalności, to można je (przynajmniej teoretycznie) zastąpić powierzchniowym rozkładem ładunku (podobnie, jak pokazywaliśmy przy wyznaczaniu pola wewnątrz dielektryka). Jest to jednak możliwe tylko przy prostych kształtach.

2. Wyznaczanie potencjału przez superpozycję źródeł

Wykorzystujemy, zależności

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R}, \quad \varphi_w = \sum_i \varphi_i \quad \text{lub} \quad \varphi_w = \int_{V_s} \varphi(r) dV$$

Ograniczeniem zakresu stosowalności tej metody są identyczne, jak w p. 1. Zaletą jest tutaj jednak posługiwanie się wielkością skalarną, co obniża złożoność obliczeniową zagadnień.

3. Wyznaczanie indukcji (natężenia pola z prawa Gaussa)

W tym przypadku wykorzystujemy prawo Gaussa w postaci całkowej

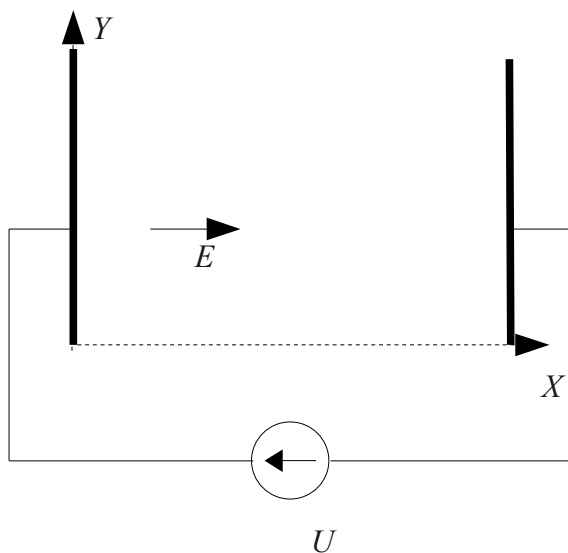
$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

W przypadku symetrii pola i regularnych powierzchni jesteśmy w stanie wyznaczyć całkę występującą po lewej stronie równania, co prowadzi do wyznaczenia wektora indukcji.

4. Wyznaczanie potencjału przez rozwiązywanie RRC (r. Laplace'a, Poissone'a)

Równanie Poissone'a (RP) opisuje pole elektrostatyczne w wybranym punkcie. Jeśli rozwiążemy je dla wszystkich punktów wybranego obszaru, to otrzymamy rozkład potencjału w tym obszarze, a tym samym będziemy mieli możliwość wyznaczenia pola elektrostatycznego.

Zwróćmy uwagę, że samo RP nie wystarczy do jednoznacznego określenia potencjału. Możemy to pokazać na przykładzie pola pomiędzy dwoma metalowymi płytami podłączonymi do dwóch biegunów źródła napięcia.



Pole elektryczne w takim układzie (pomijamy zakrzywienia pola na krańcach) będzie miało tylko składową x, co pozwala zapisać równanie Poissone'a w postaci

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Rozwiązanie takiego równania to dowolna funkcja o postaci

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon} x^2 + c_1 x + c_2,$$

gdzie c_1 i c_2 to stałe. Jeżeli objętościowa gęstość ładunku w obszarze pomiędzy płytami jest równa zero, to równanie Poissone'a redukuje się do równania Laplace'a, a jego rozwiązanie to

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2$$

W każdym z tych rozwiązań występują dwie stałe – jedną z nich (c_2) można wybrać praktycznie dowolnie, gdyż zniknie ona przy różniczkowaniu potencjału w celu wyznaczenia \vec{E} . Jednak stała c_1 ma sens fizyczny i do jej wyznaczenia niezbędne są dodatkowe równania.

Zwróćmy uwagę, że równanie opisujące pole pomiędzy płytami nie uwzględnia ładunku powierzchniowego na płytach. Ładunek ten jest wymuszony przez zewnętrzne źródło napięcia. Możemy więc stwierdzić (jest to poniekąd oczywiste), że opis pola za pomocą RP może uwzględniać tylko źródła znajdujące się wewnątrz analizowanego obszaru. Źródła zewnętrzne musimy wprowadzić w inny sposób.

W naszym przypadku napięcie U możemy wprowadzić do opisu naszego problemu przez określenie różnicy potencjałów pomiędzy lewym, a prawym brzegiem analizowanego obszaru. Jeżeli odległość pomiędzy płytami wynosi d i przyjmiemy pokazany na rysunku układ współrzędnych to różnicę potencjału możemy określić przez równanie:

$$\varphi(0) - \varphi(d) = U$$

Biorąc pod uwagę, że możemy dowolnie wybrać potencjał odniesienia założymy, że wybieramy $\varphi(d) = 0$ (odpowiada to „uziemienu” prawego bieguna źródła).

Otrzymamy więc równania:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= U \\ \varphi(d) &= 0 \end{aligned}$$

które pozwolą nam wyznaczyć stałe c_1 i c_2 . Podstawiając powyższe warunki do ogólnej postaci funkcji opisujących potencjał otrzymamy w przypadku r. Laplace'a:

$$U = \varphi(0) = c_2$$

$$0 = \varphi(d) = c_1 \cdot d + c_2 = c_1 \cdot d + U \rightarrow c_1 = -\frac{U}{d}$$

Potencjał jest więc opisany wzorem

$$\varphi(x) = -\frac{U}{d}x + U$$

W przypadku równania Poissona'a:

$$U = \varphi(0) = c_2$$

$$0 = \varphi(d) = -\frac{\rho}{\epsilon} \cdot d^2 + c_1 \cdot d + c_2 = c_1 \cdot d + U - \frac{\rho}{\epsilon} \cdot d^2 \rightarrow c_1 = \frac{\rho}{\epsilon} \cdot d - \frac{U}{d}$$

Potencjał jest w tym przypadku opisany wzorem

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{\epsilon}x^2 + \left(\frac{\rho}{\epsilon}d - \frac{U}{d}\right)x + U$$

Natężenie pola elektrycznego dla obu przypadków można wyrazić odpowiednio jako $\vec{E} = [U/d, 0]$ dla równania Laplace'a, lub $\vec{E} = [(2\rho/\epsilon)x + U/d - (\rho/\epsilon)d, 0]$ dla równania Poissona'a

Zagadnienia brzegowe

Jak pokazuje powyższy przykład, aby jednoznacznie określić rozkład pola w ograniczonym obszarze Ω , należy:

1. wybrać wielkość (funkcję) za pomocą której będziemy to pole opisywać. W przypadku pola elektrostatycznego dogodnie jest przyjąć skalarny potencjał elektryczny.
2. określić równanie różniczkowe opisujące zmienność tej funkcji w Ω ;
3. określić rozkład współczynnika opisującego własności materiałowe w Ω ;
4. określić rozkład źródła w Ω ;
5. określić warunki brzegowe na Γ - granicy obszaru Ω .

Warunki 1-4 określamy w przypadku pola elektrostatycznego przez określenie wielkości występujących w równaniu Poissona'a. ρ i ϵ będą tutaj w ogólnym przypadku funkcjami

położenia, choć w technicznych problemach wartości te mają zwykle rozkład dość uporządkowany – na przykład wyróżniamy w obszarze Ω kilka podobszarów, w których współczynniki ρ i ϵ są stałe.

Warunki brzegowe określają wpływ źródeł pola położonych poza obszarem Ω na rozkład pola w tym obszarze. Na przykład w modelu opisywanym powyżej różnica pomiędzy wartościami potencjałów na lewej i prawej płycie określała źródło napięcia, umieszczone poza obszarem zainteresowania (którym była przestrzeń pomiędzy okładkami). W ogólnym przypadku możemy wyróżnić trzy rodzaje warunków brzegowych:

1. Warunki brzegowe pierwszego rodzaju (zwane też warunkami Dirichleta). Mają one postać

$$\varphi = \bar{\varphi}, \text{ na } \Gamma_1$$

gdzie $\bar{\varphi}$ jest wielkością znaną, a Γ_1 to część brzegu obszaru. Takie warunki wprowadzamy, gdy chcemy przyjąć potencjał odniesienia (pamiętamy, że potencjał jest definiowany przez natężenie pola z dokładnością do stałej), albo, gdy chcemy zaznaczyć wpływ zewnętrznych źródeł napięcia.

2. Warunki brzegowe drugiego rodzaju (zwane też warunkami Neumanna). Mają one postać

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \bar{\sigma}, \text{ na } \Gamma_2$$

gdzie $\bar{\sigma}$ jest wielkością znaną, \vec{n} to kierunek normalny zewnętrzny do brzegu, a Γ_2 to część brzegu obszaru. Takie warunki wprowadzamy, gdy chcemy uwzględnić wpływ wewnętrznych źródeł związanych z ładunkami położonymi poza obszarem. Takie ładunki działają na pole w obszarze Ω w postaci strumienia indukcji elektrycznej (\vec{D}). Zwróćmy uwagę, że wprowadzenie współczynnika ϵ do lewej strony warunku Neumanna oznacza, że $\bar{\sigma}$ wyrażona jest podobnie jak \vec{D} w kulombach na metr kwadratowy. Specjalną, często używaną wersją warunków Neumanna są tak zwane jednorodne WN:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

Warunek ten oznacza, że brzeg, na którym zadano ten warunek doskonale izoluje obszar Ω od „reszty Wszechświata”.

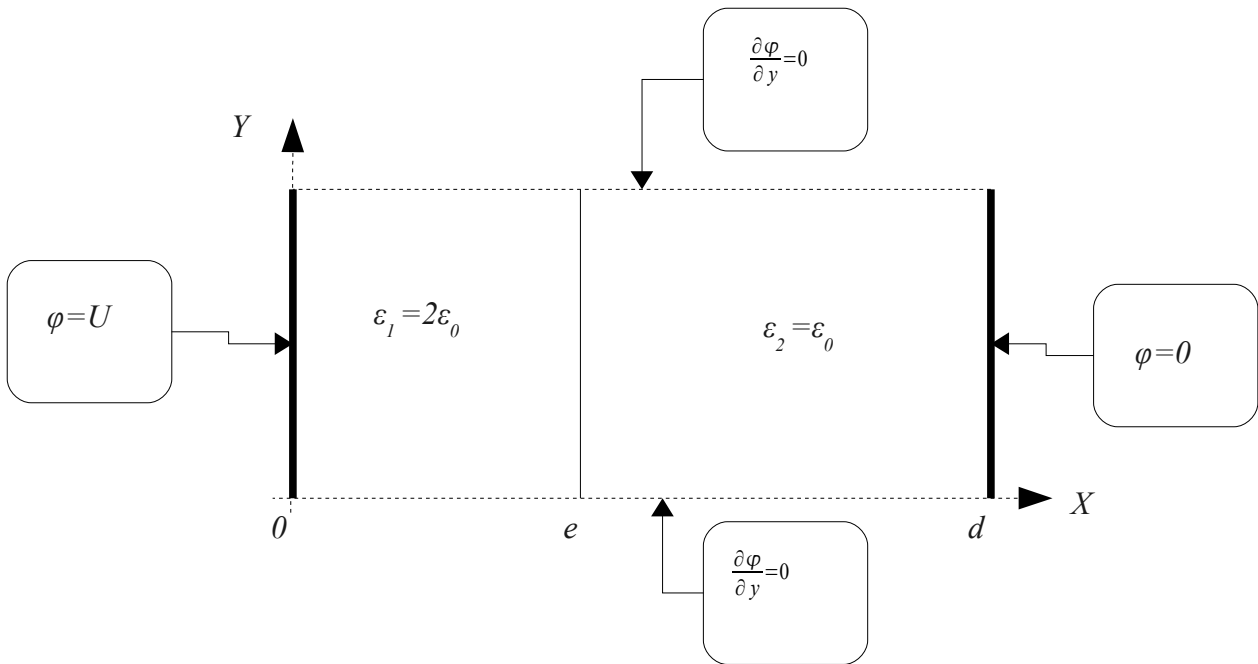
3. Warunki brzegowe trzeciego rodzaju (zwane też mieszanymi albo Robinami). Mają one postać

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \alpha \varphi + \beta, \text{ na } \Gamma_3$$

gdzie α i β są znane, \vec{n} to kierunek normalny zewnętrzny do brzegu, a Γ_3 to część brzegu obszaru. Jest to najbardziej ogólny warunek, który można zredukować do warunku Dirichleta lub warunku Neumanna.

4. Warunki brzegowe Cauchy'ego, kiedy na pewnym fragmencie brzegu musimy zadać zarówno warunek Dirichlet'a, jak i Neumanna.

Jeżeli w obszarze występują podobszary o różnych współczynnikach materiałowych, to może być konieczne zastosowanie dodatkowych warunków na granicach materiałów. Zilustrujmy ten problem na przykładzie obszaru między metalowymi płytami wypełnionego materiałami o różnych przenikalnościach dielektrycznych:



W takim przypadku możemy opisać rozkład potencjału osobno w lewym obszarze, a osobno w prawym:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= c_1 x + c_2 \quad \forall x \in \langle 0, e \rangle \\ \varphi_2(x) &= c_3 x + c_4 \quad \forall x \in \langle e, d \rangle \end{aligned}$$

Warunki brzegowe Dirichleta:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= U \Rightarrow c_2 = U, \\ \varphi_2(d) &= 0 \Rightarrow c_3 d + c_4 = 0, \end{aligned}$$

to w tym wypadku za mało, aby jednoznacznie określić stałe c_1, c_2, c_3, c_4 - potrzebujemy jeszcze dwóch innych równań. Znajdziemy je wykorzystując warunki ciągłości potencjału i składowej normalnej wektora indukcji elektrycznej na granicy materiałów.

Warunek ciągłości potencjału (wynikający z zasady zachowania energii):

$$\varphi_1(e) = \varphi_2(e) \Rightarrow c_1 e + c_2 = c_3 e + c_4$$

Warunek ciągłości składowej normalnej (czyli składowej x) wektora indukcji elektrycznej:

$$\vec{D}_{1n}(e) = \vec{D}_{2n}(e) \Rightarrow -2\varepsilon_0 c_1 = -\varepsilon_0 c_3 \Rightarrow 2c_1 = c_3$$

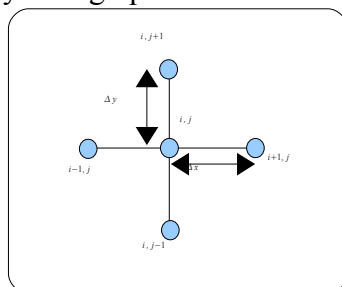
Metoda różnic skończonych

MRS polega na przekształceniu zagadnienia brzegowego w układ równań algebraicznych. Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy zbiór wartości wielkości opisującej pole (np. potencjału) w wybranych punktach. Aby przekształcić równanie różniczkowe w zestaw równań algebraicznych zastępujemy je przez zestaw równań różnicowych określonych w wybranych punktach, najczęściej tworzących równomierną siatkę prostokątną, aproksymującą analizowany obszar.

Dla równania Poissona:

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Wykorzystując szablon dla wybranego punktu:



Otrzymamy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(i, j) \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i, j) = \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{x_{i+1, j} - x_{i, j}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i, j) - \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i-1, j)}{\Delta x} = \frac{\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta x)^2}$$

Czyli

$$\frac{\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta y)^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Jeżeli przyjmiemy taki sam krok siatki $\Delta = \Delta x = \Delta y$ w kierunkach x i y, to dla każdego węzła otrzymamy:

$$\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} + \varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 4\varphi_{i, j} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2$$