# Electromagnetic Fields

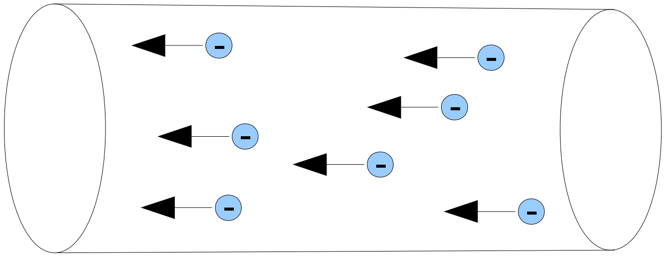
*Lecture 5*

# *The Steady Current Field*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# What is current?

## **Electric current:** *Flow of electric charge.*




## Electric current in metals

A solid conductive metal contains free electrons.

When a metal wire is subjected to electric force applied on its opposite ends, these free electrons rush in the direction of the force, thus forming what we call an **electric current.**

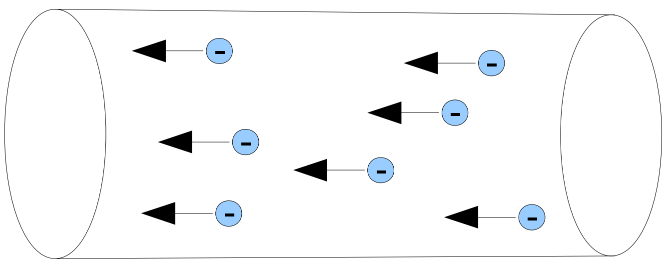
## Electric current in other materials

Any stream of charged objects may constitute an electric current

- positive and negative ions
- "holes" in semiconductors

# Drift Speed

$$v = \frac{I}{n\,Q\,A}$$




v - drift velocity
I - current value
n - number of charges per unit volume
Q - the charge on each particle.
A - the cross-sectional area of the conductor

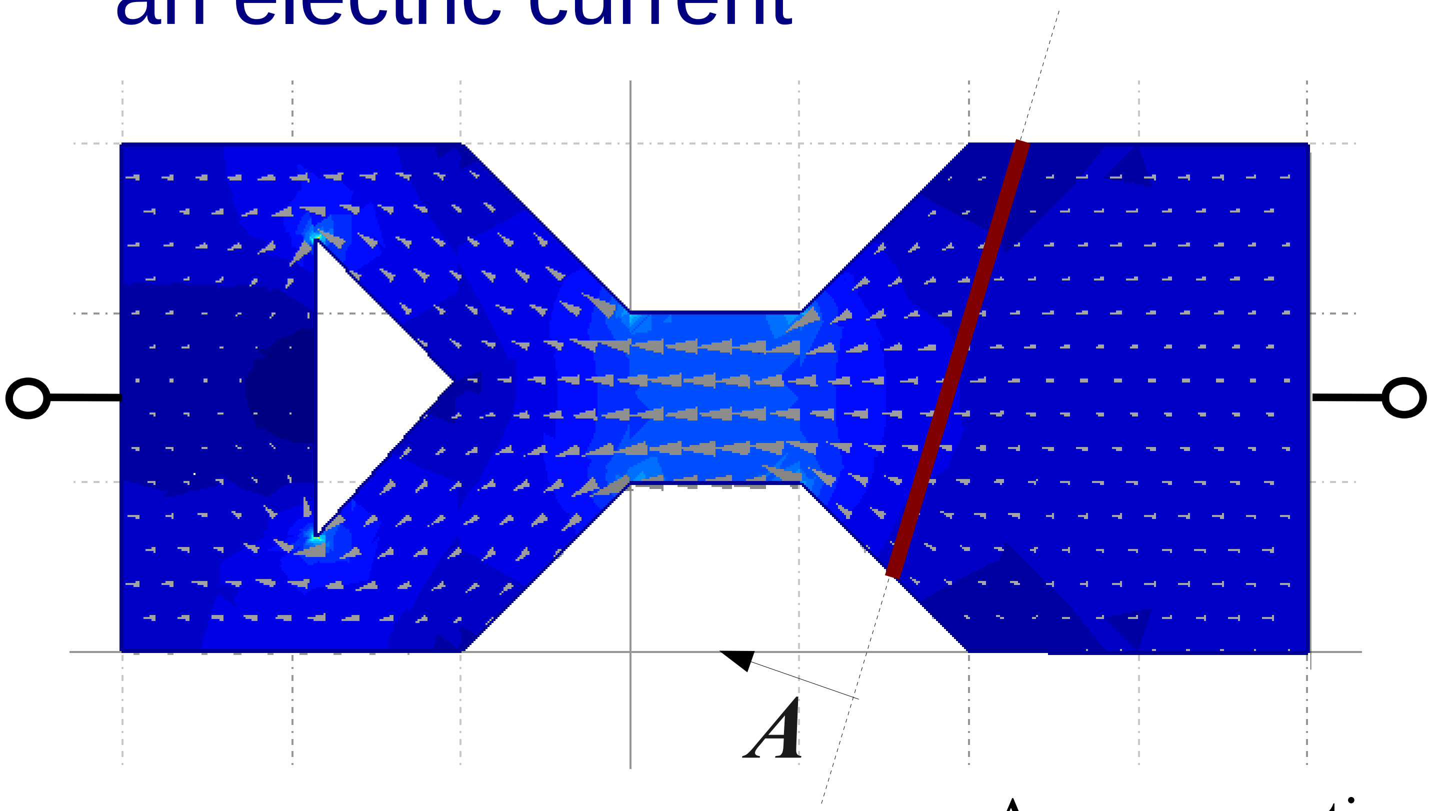
**Example:**
Current 3 A flows in copper wire of 1mm diameter. Drift velocity can be calculated as: **0.28 [mm/s] or 1.0 [m/h]**.

Assumptions: n=8.5e28[1/m3], Q=1.6e-19[C], A= 7.85e-7[m2]


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Current Density

**Current density** is a measure of the density of an electric current




$$J = \frac{I}{A}$$

$$I = \int \boldsymbol{J} \cdot d\,\boldsymbol{A}$$

A - cross-sectional area

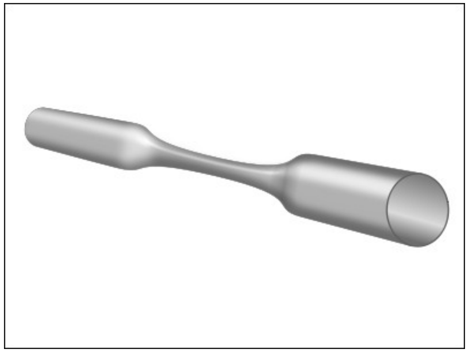

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Hydraulic analogy

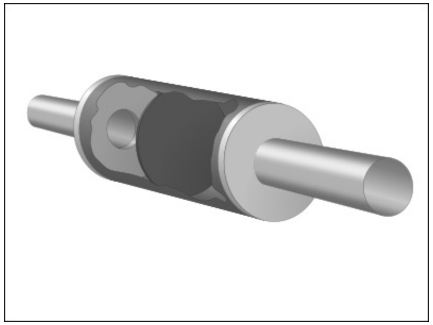
**Flow of charges similar to the water flow**

| | |
|---|---|
| Electic charge | Water particle |
| Conductor | Pipe / Canal |
| Electric potential | Pressure / Water height |
| Voltage | Difference in pressure / Difference in water height |
| Current | Volume flow rate |

Water Resistor



Water Capacitor





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Current sources

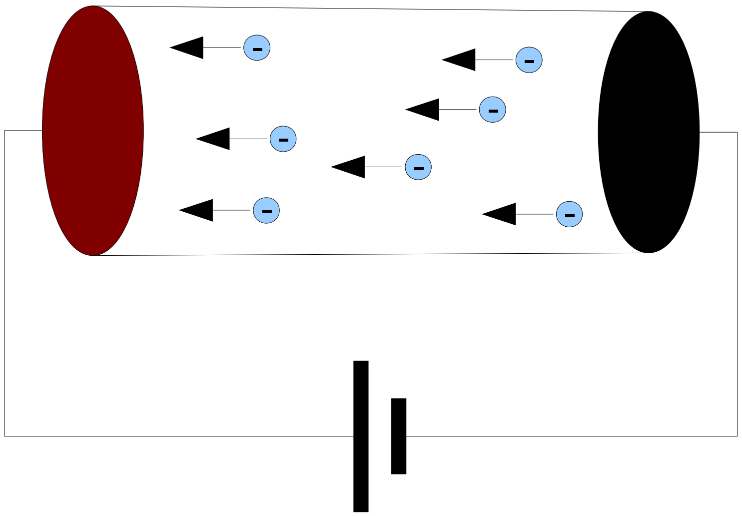
Current (flow of charges) is forced by electric field.

Current density

Electric field

$$J = \sigma E$$

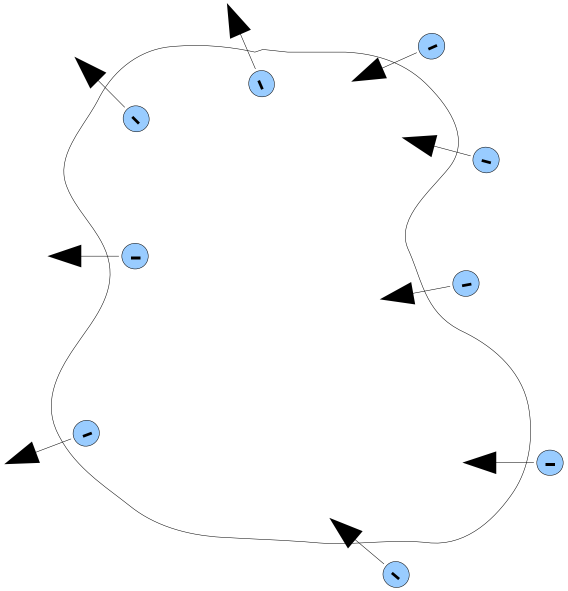
Material property (conductivity)



# Current sources

## Flow through closed boundary is zero.

True statement for the most of 'normal' electrical circuits.



$$\oint \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Constant number of charges in the area.

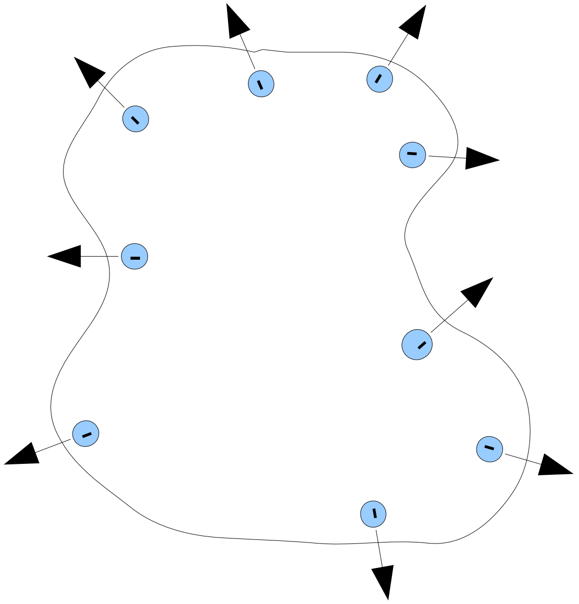


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Current sources

## Charges could be 'generated'.

Unusual, specific phenomena.



$$\int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Variable number of charges in the area.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Fields vs. Circuits

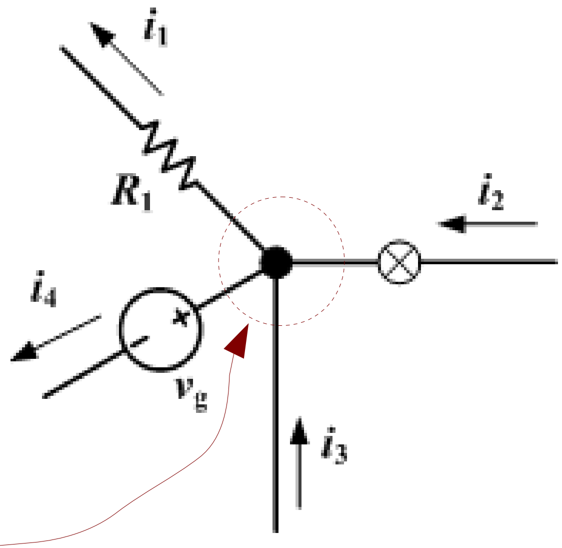
- Kirchhoff's Current Law (KCL)

The algebraic sum of currents in a network of conductors meeting at a point is zero.

Circuits theory: $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$

Field theory: $\int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

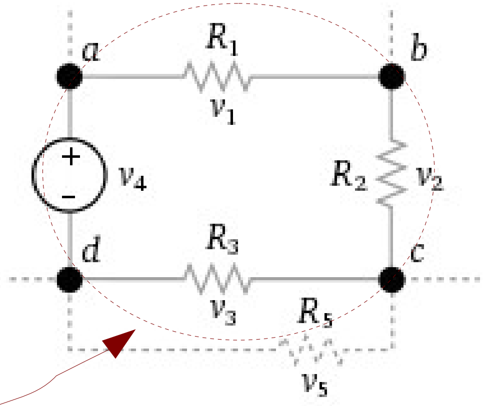


# Fields vs. Circuits

- Kirchhoff's Voltage Law (KVL)

The directed sum of the electrical potential differences (voltage) around any closed circuit is zero.

Circuits theory: $\sum_{k=1}^{n} V_k = 0$




Field theory: $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

# Ohm's Law

- Ohm's Law

The current through a conductor is directly proportional to the voltage, and inversely proportional to the resistance.

**Circuits theory:**

$$I=\frac{U}{R} \qquad R=\frac{U}{I}$$

Resistance is property of object.
Depends on: size, shape, structure, materials.

**Field theory:**

$$\boldsymbol{J}=\sigma\,\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{J}=\frac{\boldsymbol{E}}{\rho_r}$$

Conductivity is property of material.
Does not depend on: size, shape, structure of object.

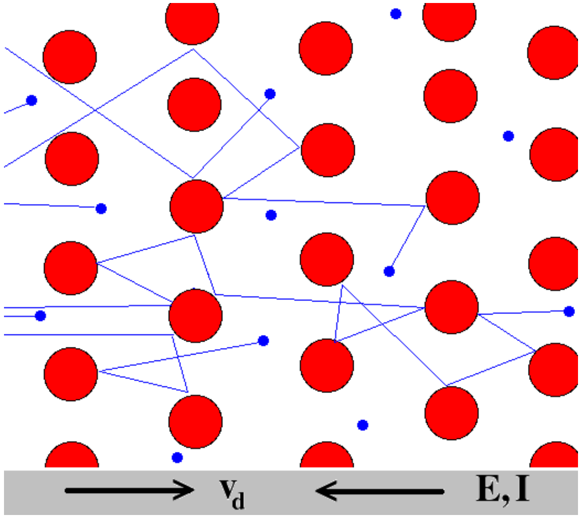


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Conductivity

- Conductivity measures material's ability to conduct current.
- Depends on:
  - number of free charges,
  - number of collisions,

$$\boldsymbol{J} = \sigma\,\boldsymbol{E}$$




- Resistivity = 1 / Conductivity


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Conductivity

**Conductivity** of materials
[Siemens per meter] [S/m]

| Conductors | Low conducting materials | Isolators |
|---|---|---|
| Silver = 6.3 * 10^7 | Sea water = 4.8 | Deionized water = 5.5 * 10^-6 |
| Copper = 5.8 * 10^7 | Drinking water = 0.005 | Air = 5 * 10^-13 |
| Aluminium = 3.5 * 10^7 | Living tissues = 1 | Hexane = 1 * 10^-14 |

**Resistivity**
[Ohm meter] [Ωm]


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Electrostatic and current field

- Electrostatic and Steady current field are different in nature, but mathematically are similar.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

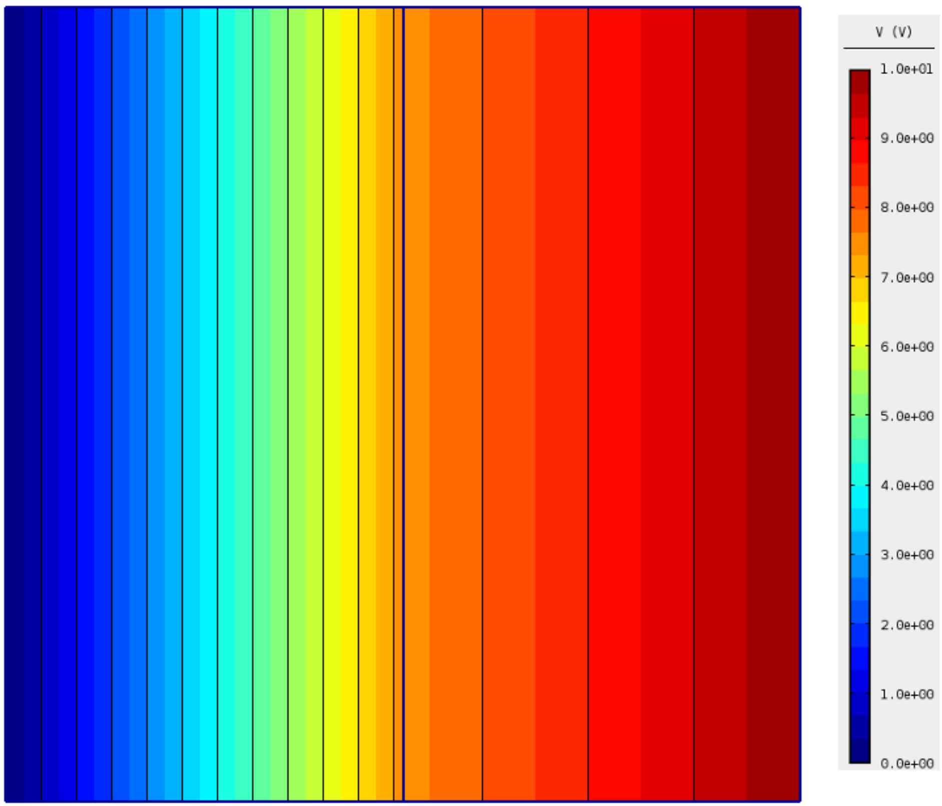
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

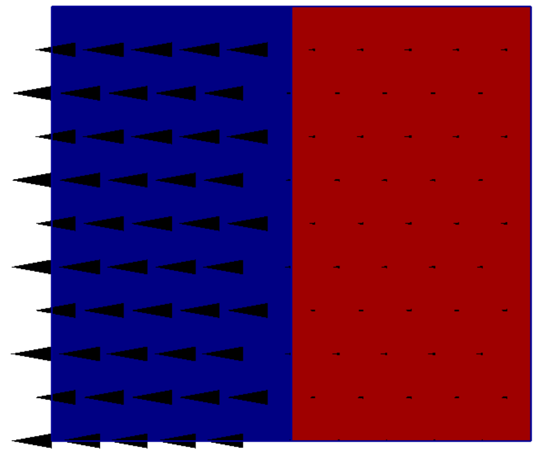
$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

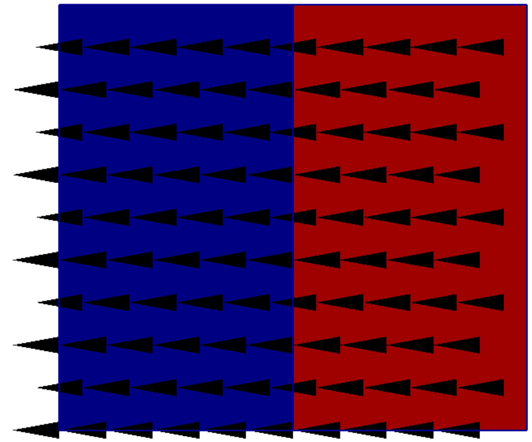
Poisson's equations

# Two layer resistor: series



Electric field



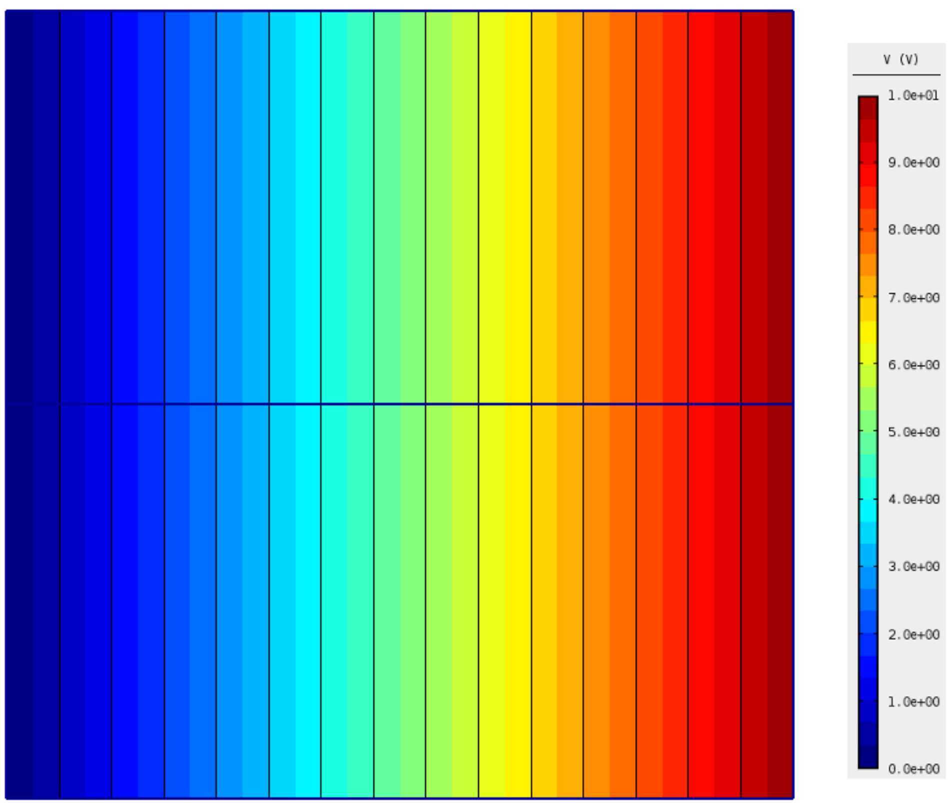
Current density

Electric scalar potential

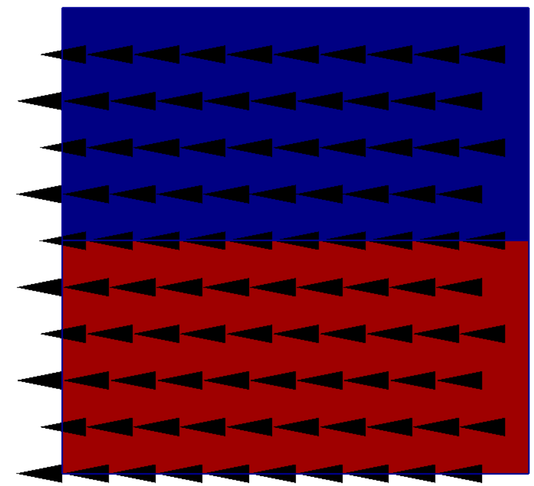


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

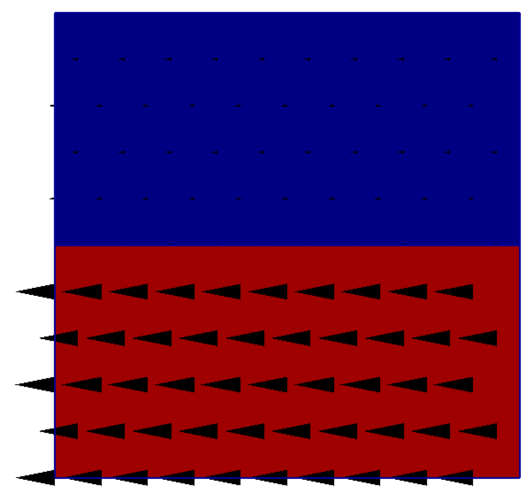
# Two layer resistor: parallel




Electric scalar potential



Electric field

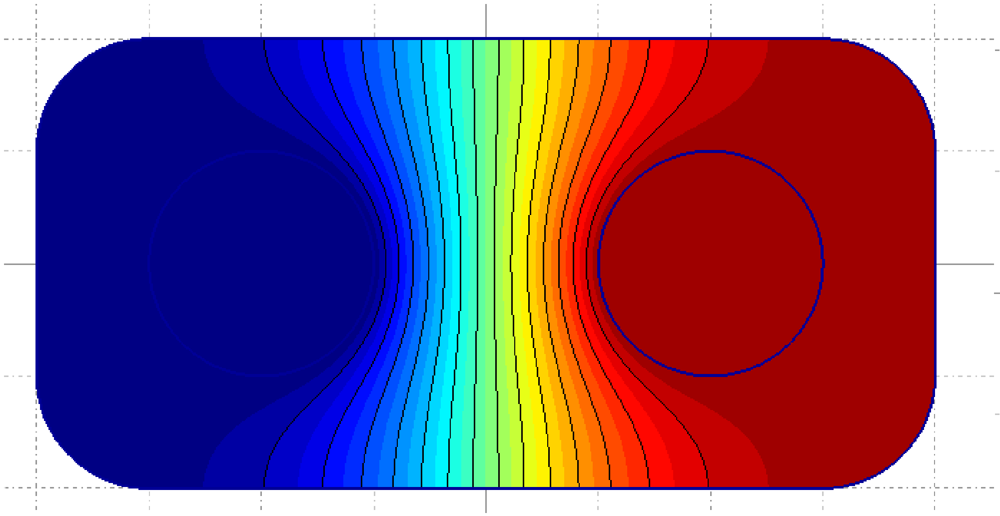


Current density

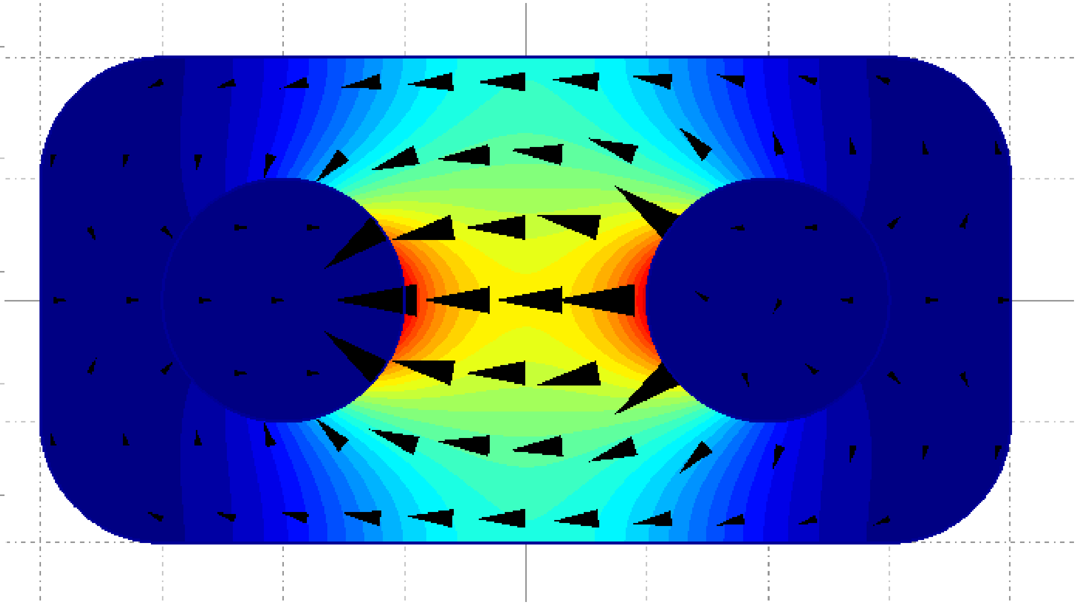


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Cross isolation current



Potential distribution inside two wire cable



Current density inside the cable

# How to calculate resistance?

**Serial structure**

1. Assume $I$
2. Find $\boldsymbol{J}$
3. Calculate $\boldsymbol{E}$
4. Find voltage: $U$
5. Resistance is:

$$R = \frac{U}{I}$$

**Parallel structure**

1. Assume voltage $U$
2. Find $\boldsymbol{E}$
3. Calculate $\boldsymbol{J}$
4. Find current: $I$
5. Resistance is:

$$R = \frac{U}{I}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

# Power density

- Power density [W/m3]
  - Heating, thermal loses

$$p = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$$

- Total power [W]

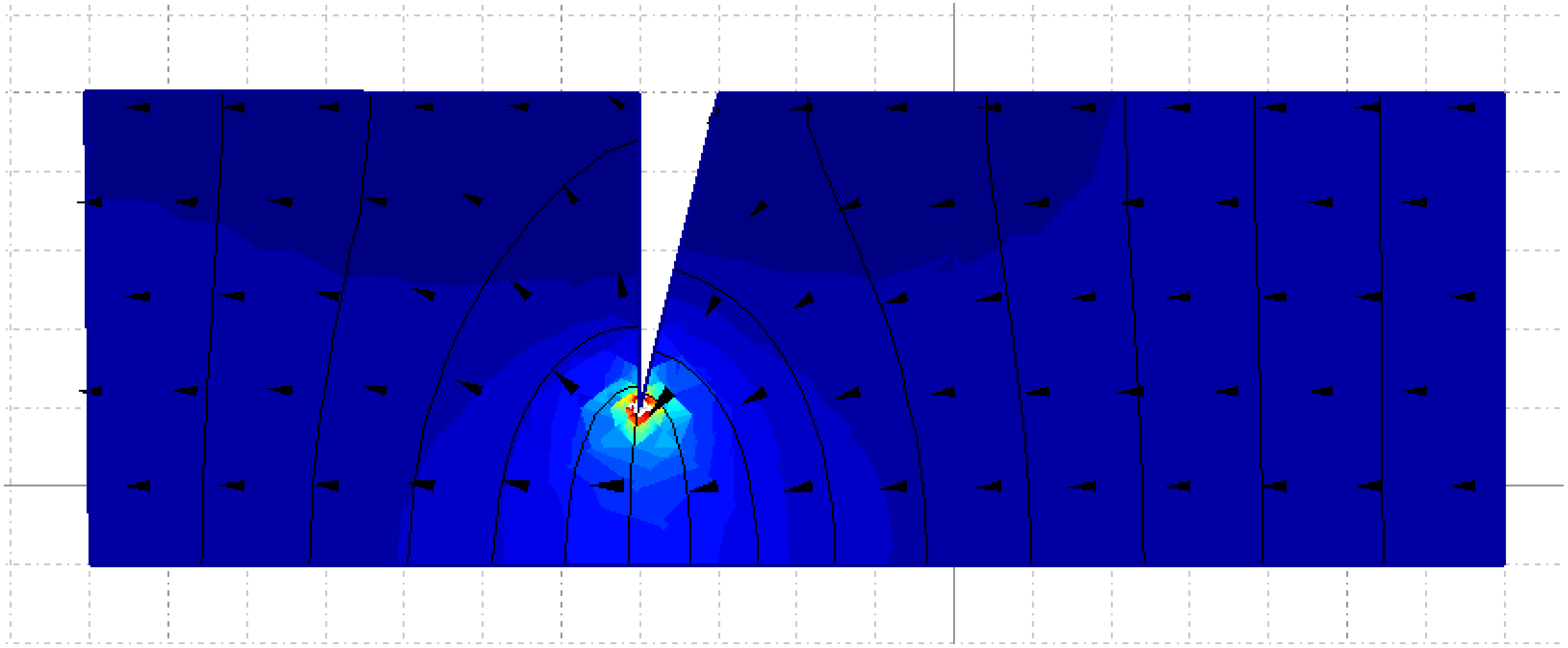
$$P = \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, dv = U\, I$$

- For simple resistor:

$$P = \left( \frac{U}{l} \frac{I}{A} \right) l\, A = U\, I$$

# Crack it the cable

- Why cracks can cause the fire?



Power density [W/m3]