Zadanie: obliczyć strumień funkcji wektorowej

$$\vec{A}(x, y, z) = [y + 2, x, 1]$$

przez powierzchnię kuli o promieniu r.

Rozwiązanie: wyrażamy kartezjańskie składowe wektora $\vec{A}$ za pomocą współrzędnych sferycznych:

$$\vec{A}(r, \varphi, \Theta) = [r \sin\Theta \sin\varphi + 2, r \sin\Theta \cos\varphi, 1]$$

Strumień wyrazimy w postaci całki:

$$\oint_{S(r)} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{A}(r, \varphi, \Theta) \cdot \mathbf{1}_r \, r^2 \sin\Theta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\Theta$$

Tu tkwiły błędy:
a) Wektor $\vec{A}$ wyrażony jest za pomocą współrzędnych sferycznych, ale jego współrzędne określają ciągle współczynniki z układu kartezjańskiego. Dlatego w celu obliczenia iloczynu wektorowego musimy przedstawić wektor $\mathbf{1}_r$ także jako składowe w układzie kartezjańskim:

$$\mathbf{1_r} = [\sin\Theta \cos\varphi, sin\Theta \sin\varphi, \cos\Theta]$$

b) Element powierzchni kuli to $r^2 \sin\Theta \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta$ – jego wielkość zależy od promienia kuli, a całka $\oint_S 1 \mathrm{d}S$ musi dawać wynik równy powierzchni kuli ($4\pi r^2$). Zmienna φ zmienia się od 0 do 2π obiegając kulę dookoła, zaś Θ zmienia się od 0 na biegunie północnym do π na południowym.

Obliczamy iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \mathbf{1}_r$:

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \varphi, \Theta) \cdot [\sin\Theta\cos\varphi, \sin\Theta\sin\varphi, \cos\Theta] &= (r\sin\Theta\sin\varphi + 2)\sin\Theta\cos\varphi + \\ &\quad + r\sin\Theta\cos\varphi\sin\Theta\sin\varphi + \\ &\quad + \cos\Theta. \end{aligned}$$

Ponieważ całka sumy jest sumą całek, a więc możemy wyliczyć strumień jako sumę całek poszczególnych składników. Dość często będziemy korzystać z tożsamości trygonometrycznej $\sin\alpha\cos\alpha = 1/2 \sin 2\alpha$.

Pierwszy składnik to $r\sin\Theta\sin\varphi\sin\Theta\cos\varphi$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (r\sin\Theta\sin\varphi\sin\Theta\cos\varphi)\, r^2\sin\Theta \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta =$$
$$= \frac{r^3}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\Theta \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta = \frac{r^3}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\Theta \left(\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\Theta =$$
$$= \frac{r^3}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\Theta \cdot (0)\mathrm{d}\Theta = 0.$$

Drugi składnik to $2\sin\Theta\cos\varphi$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (2\sin\Theta\cos\varphi)\, r^2\sin\Theta \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta = 2r^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\Theta\cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta =$$
$$2r^2\int_0^{\pi} \sin^2\Theta \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\Theta = 2r^2\int_0^{\pi} \sin^2\Theta \cdot (0)\mathrm{d}\Theta = 0.$$

Trzeci składnik to $r\sin\Theta\cos\varphi\sin\Theta\sin\varphi$ (czyli to samo, co pierwszy składnik):

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r\sin\Theta\cos\varphi\sin\Theta\sin\varphi)\,r^2\sin\Theta\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta =$$
$$= \tfrac{r^3}{2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\Theta\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta = \tfrac{r^3}{2}\int_0^\pi\sin^3\Theta\left(\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\Theta =$$
$$= \tfrac{r^3}{2}\int_0^\pi\sin^3\Theta\cdot(0)\mathrm{d}\Theta = 0.$$

Czwarty, ostatni składnik to $\cos\Theta$:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\cos\Theta)\,r^2\sin\Theta\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta = \tfrac{r^2}{2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin 2\Theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Theta =$$
$$\tfrac{r^2}{2}\int_0^\pi\sin 2\Theta\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\Theta = \pi r^2\int_0^\pi\sin 2\Theta\mathrm{d}\Theta = 0.$$

Ostatecznie całkowity strumień jest równy 0.