

Podstawy elektromagnetyzmu

Wykład 11

Fale elektromagnetyczne

Równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ruch ładunku jest źródłem pola magnetycznego

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Zmiana pola magnetycznego w czasie jest źródłem pola elektrycznego

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Źródłem pola elektrycznego jest ładunek.
Nie ma ładunków magnetycznych.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Aproksymacja reakcji materii na pole elektryczne (i magnetyczne).

Równanie falowe dla E

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Zastąp przez E zarówno J jak i D

Rotacja stronami

Równanie falowe dla \mathbf{E}

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad *$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t}$$

Podstaw * w miejsce $\nabla \times \mathbf{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$



Równanie falowe dla H

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad *$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t}$$

Podstaw H w miejsce B

Zastąp przez E zarówno J jak i D
i wykonaj rotację stronami

Podstaw $*$ w miejsce $\nabla \times E$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Równanie falowe – przekształcenia

Dla każdego wektora:

\mathbf{H} jest bezźródłowe

We wsp. kartezjańskich

$$\nabla^2 H_x = \mu \sigma \frac{\partial H_x}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}$$


$$\nabla^2 H_y = \mu \sigma \frac{\partial H_y}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 H_z = \mu \sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$


$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Ciąg dalszy

Zwkle:

$$\rho = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)$$

Pola harmoniczne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t + \psi)}) = \text{Im}(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \dots = \text{Im}(\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t})$$

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$$

Zespolone równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}$$

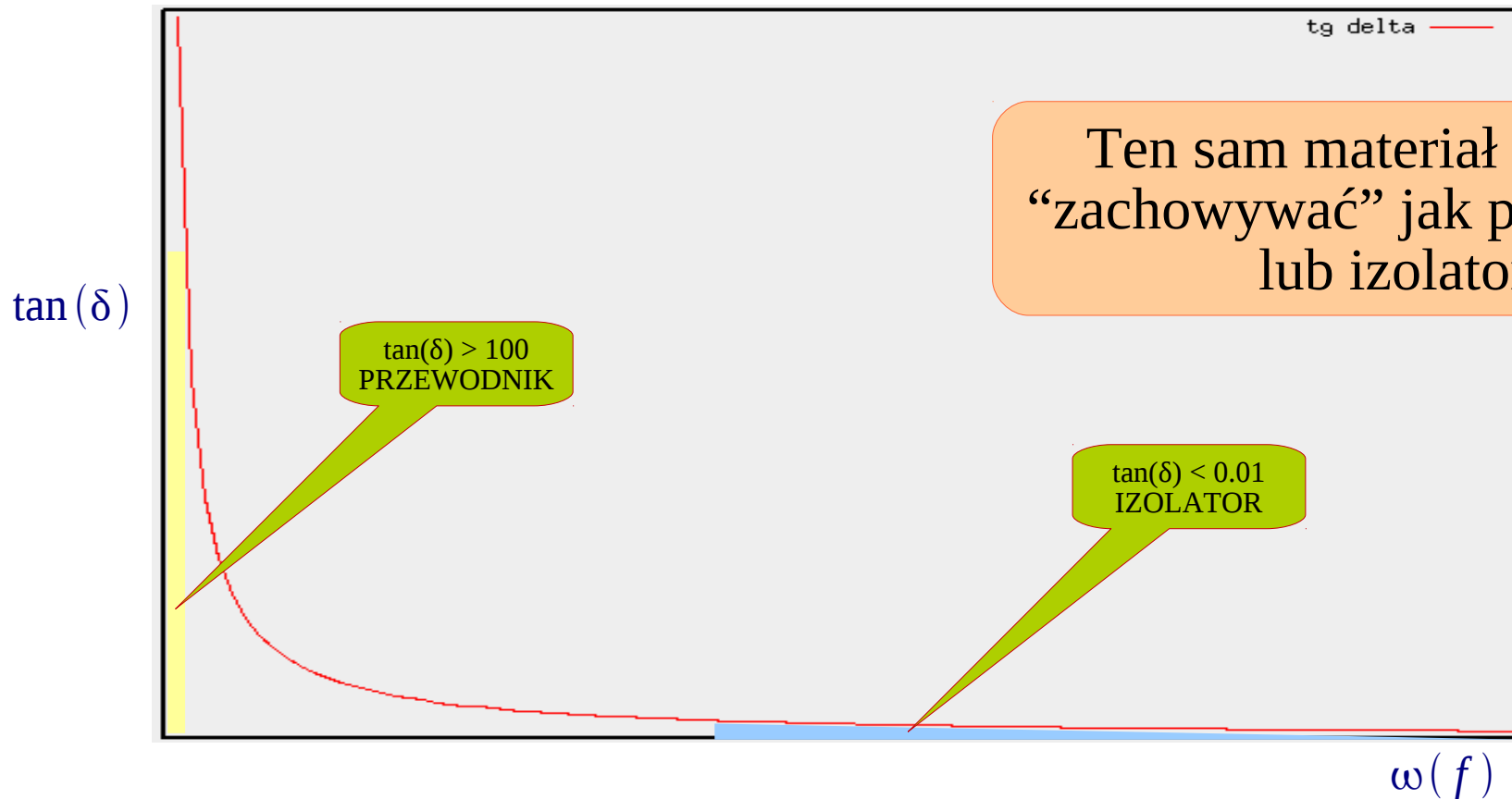
$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Chcemy symetrii

Co to jest “przewodnik”

$$\nabla \times \underline{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \underline{E} = \underline{J}_\sigma + \underline{J}_\varepsilon$$

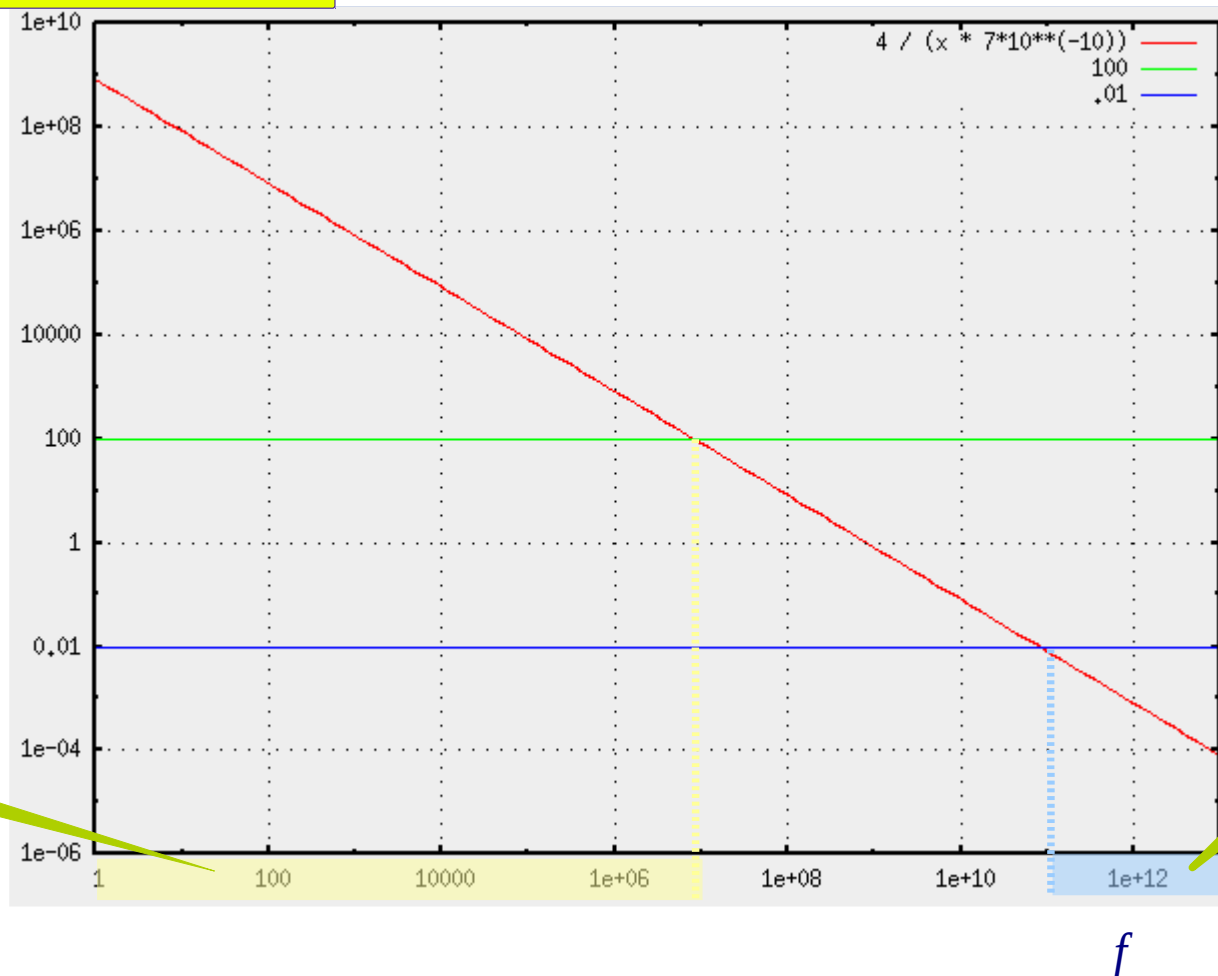
$$\frac{J_\sigma}{J_\varepsilon} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan(\delta)$$



Przykład: woda morska

$$\sigma = 4 \text{ S/m}, \epsilon = 7 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

$\tan(\delta)$



$\tan(\delta) > 100$
PRZEWODNIK

$\tan(\delta) < 0.01$
IZOLATOR

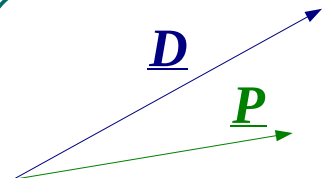
Przenikalność zespolona

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon - j \left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

$$\underline{\underline{J}}_{\sigma} = (\sigma + \omega \epsilon'') \underline{\underline{E}}$$

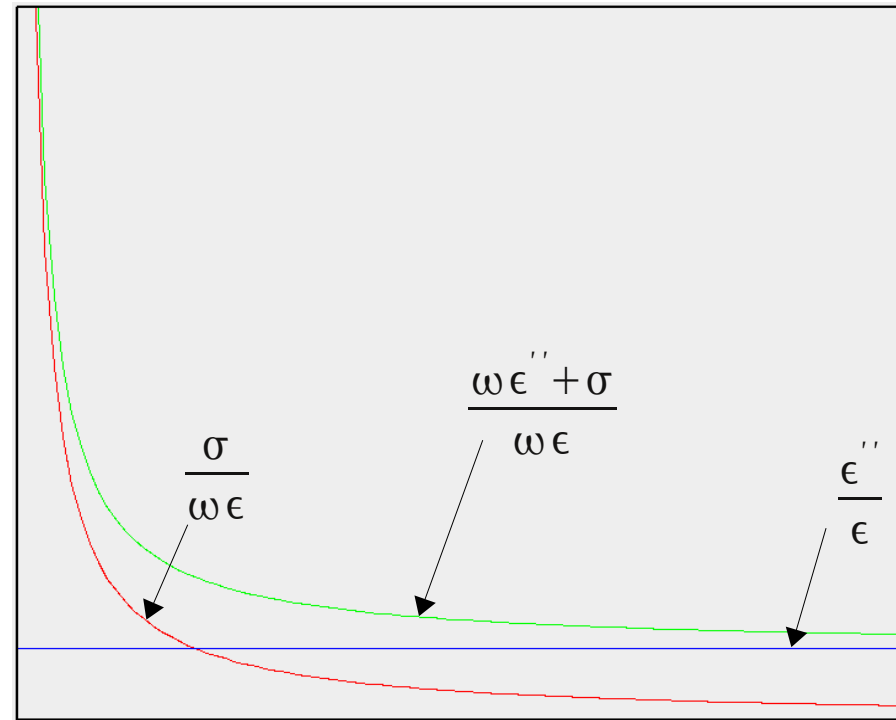
$$\tan(\delta) = \frac{(\sigma + \omega \epsilon'')}{\omega \epsilon}$$



$$\underline{\underline{D}} = (\epsilon - j \epsilon'') \underline{\underline{E}}$$

Dla w.cz. dipole “nie nadążają” za zmianami pola!

$\tan(\delta)$



$\omega(f)$

Przypadki specjalne

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)$$

Przewodnik

- 1) Dominuje prąd przewodnictwa (własności materiału i/lub relatywnie niska częstotliwość)
- 2) Nie uwzględniamy ładunków..

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

To jest równanie dyfuzji, występujące także w opisie przewodzenia ciepła.

Dielektryk

- 1) Dominuje prąd przesunięcia.
- 2) Rozważamy pole w próżni (bez ładunków)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Klasyczne równanie falowe

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.99 \times 10^8 \text{ (m/s)} = c$$

Fala harmoniczna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t + \psi)}) = \text{Im}(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}), \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= (\sigma + j\omega \epsilon) \underline{\mathbf{E}} & \nabla^2 \underline{\mathbf{H}} &= j\omega \sigma \mu \underline{\mathbf{H}} - \omega^2 \epsilon \mu \underline{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}} & \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} &= j\omega \sigma \mu \underline{\mathbf{E}} - \omega^2 \epsilon \mu \underline{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{H}} = \underline{\Gamma}^2 \underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} = \underline{\Gamma}^2 \underline{\mathbf{E}}$$

Równanie Helmholtza

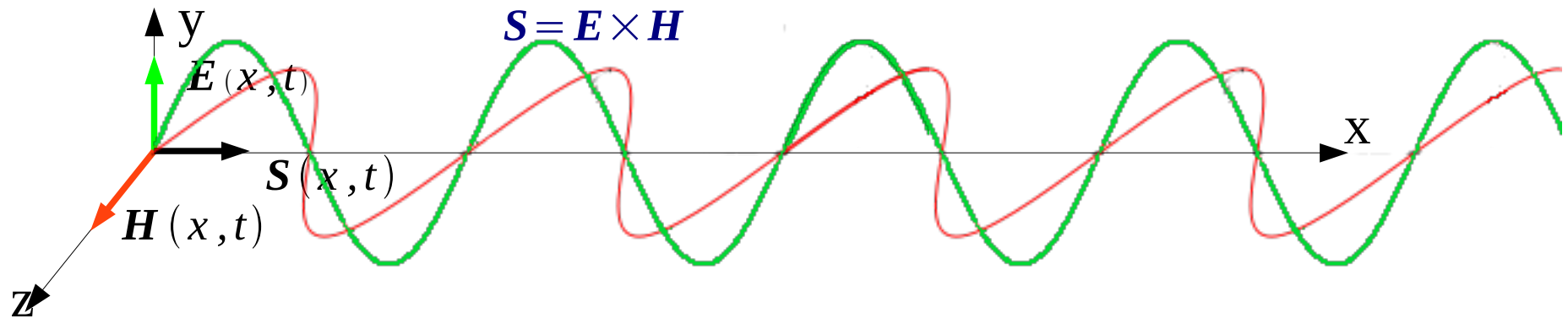
$$\underline{\Gamma}^2 = j\omega \sigma \mu - \omega^2 \epsilon \mu = -\omega^2 \underline{\epsilon} \mu \quad \underline{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$$

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{j\omega \sigma \mu - \omega^2 \epsilon \mu} = \alpha + j\beta$$

Solution

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} = \underline{\Gamma}^2 \underline{\mathbf{A}} \quad \text{or} \quad (\nabla^2 + \underline{\Gamma}^2) \underline{\mathbf{A}} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = C_1 e^{j\underline{\Gamma} \cdot \mathbf{r}} + C_2 e^{-j\underline{\Gamma} \cdot \mathbf{r}}$$

Harmoniczna fala płaska



$$\underline{H}(\underline{r}, t) = [0 \quad 0 \quad H_z(x, t)], \quad \underline{H} = [0 \quad 0 \quad \underline{H}_z(x)]$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = [0 \quad E_y(x, t) \quad 0], \quad \underline{E} = [0 \quad \underline{E}_y(x) \quad 0]$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} - \underline{\Gamma}^2 \underline{E}_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial x^2} - \underline{\Gamma}^2 \underline{H}_z = 0$$

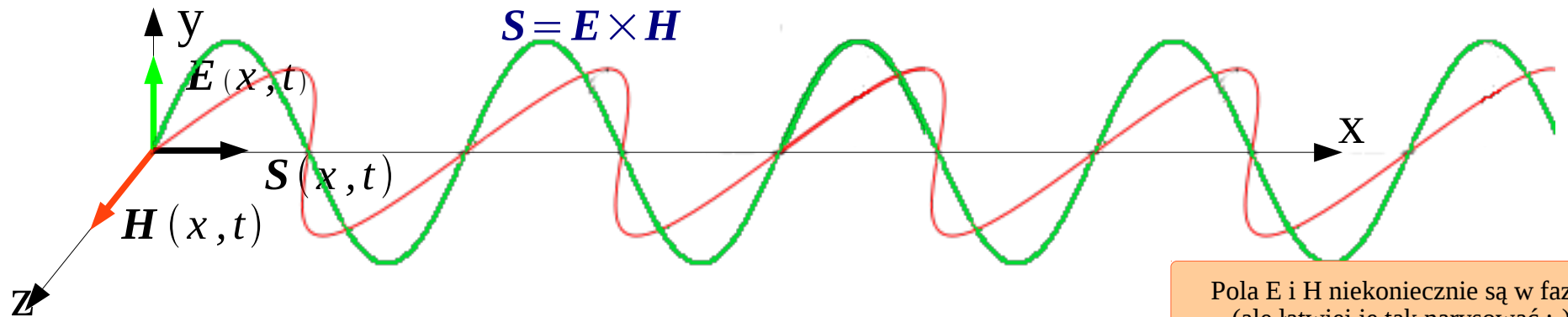
$$\underline{E}_y(x) = \underline{E}_1 e^{-\Gamma x} + \underline{E}_2 e^{\Gamma x}$$

$$\underline{H}_z(x) = \underline{H}_1 e^{-\Gamma x} + \underline{H}_2 e^{\Gamma x}$$

Fala
"padająca"

Fala
"odbita"

Harmoniczna fala płaska



Pola E i H niekoniecznie są w fazie (ale łatwiej je tak narysować ;-)

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu - \omega^2\epsilon\mu} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} (\sqrt{1 + \tan\delta} - 1)} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} (\sqrt{1 + \tan\delta} + 1)} \quad \tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

$$E_y(x,t) = E_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{e1}) + E_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{e2})$$

$$H_z(x,t) = H_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{h1}) + H_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{h2})$$

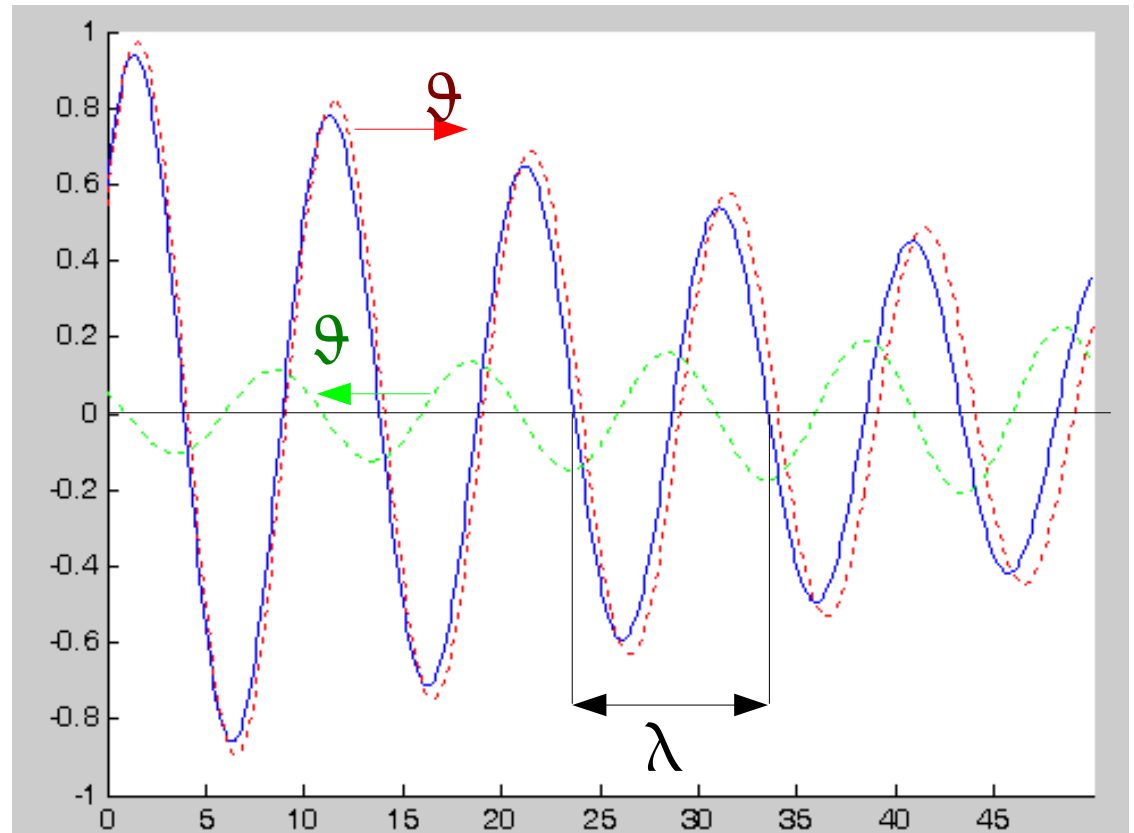
Rozchodzenie się fal

$$E_y(x, t) = E_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{e1}) + E_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{e2})$$

$$\omega t - \beta x + \psi_{e1} = \text{const}, \quad \omega t + \beta x + \psi_{e1} = \text{const}$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\lambda = v T = \frac{v}{f} = \frac{\omega}{\beta} T = \frac{2\pi}{\beta}$$



Harm. Fala Płaska w dielektryku

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu - \omega^2\varepsilon\mu} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$E_y(x, t) = E_1 \sin(\omega t - \beta x + \psi_{e1}) + E_2 \sin(\omega t + \beta x + \psi_{e2})$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$Z_c = \frac{E}{H} = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \vartheta = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Próżnia: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$
 $Z_c \approx 377 \Omega$ $\vartheta = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
 $f = 300 \text{ MHz} \rightarrow \lambda \approx 1 \text{ m}$

Harm. Fala Płaska w przewodniku

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu - \omega^2\epsilon\mu} \approx \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

$$\vartheta = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\sigma\mu}}$$

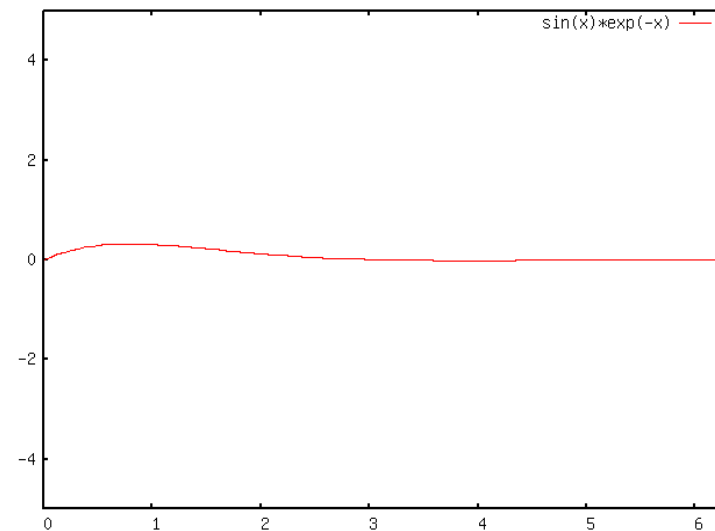
$$Z_c = \frac{E}{H} = \frac{j\omega\mu}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4}$$

Harm. Fala Płaska w przewodniku

$$E_y(x, t) = E_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{e1})$$

$$e^{-2\pi} \approx 0.0018$$

Pole (fala) jest błyskawicznie tłumione (mniej niż 2‰ na dług. fali)



Głębokość wnikania:

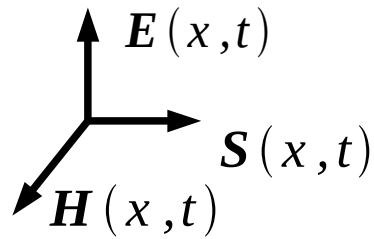
(amplituda maleje e-krotnie)

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \sigma \mu}} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Głębokość wnikania

Materiał	d dla $f=50$ Hz (mm)	d dla $f=1$ GHz(μ m)
Stal (grube przybliżenia)	2.26	0.16
Aluminium	11.74	0.83
Miedź	9.48	0.67
Złoto	11.17	0.79
Srebro	9.05	0.64

Fala (hfp) na granicy materiałów



Z_{c1} | Z_{c2}

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{1p} e^{-\Gamma_1 x} + \underline{E}_{1o} e^{\Gamma_1 x}$$

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_{1p} e^{-\Gamma_1 x} + \underline{H}_{1o} e^{\Gamma_1 x}$$

$$\underline{E}_1 / \underline{H}_1 = Z_{c1}$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_{2p} e^{-\Gamma_2 x}$$

$$\underline{H}_2 = \underline{H}_{2p} e^{-\Gamma_2 x}$$

$$\underline{E}_{1p} + \underline{E}_{1o} = \underline{E}_{2p}$$

$$\underline{H}_{1p} + \underline{H}_{1o} = \underline{H}_{2p}$$

$$\underline{E}_2 / \underline{H}_2 = Z_{c2}$$

$$\underline{E}_{1o} = M \underline{E}_{1p}$$

$$\underline{H}_{1o} = -M \underline{H}_{1p}$$

Wsp. odbicia

$$M = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$$

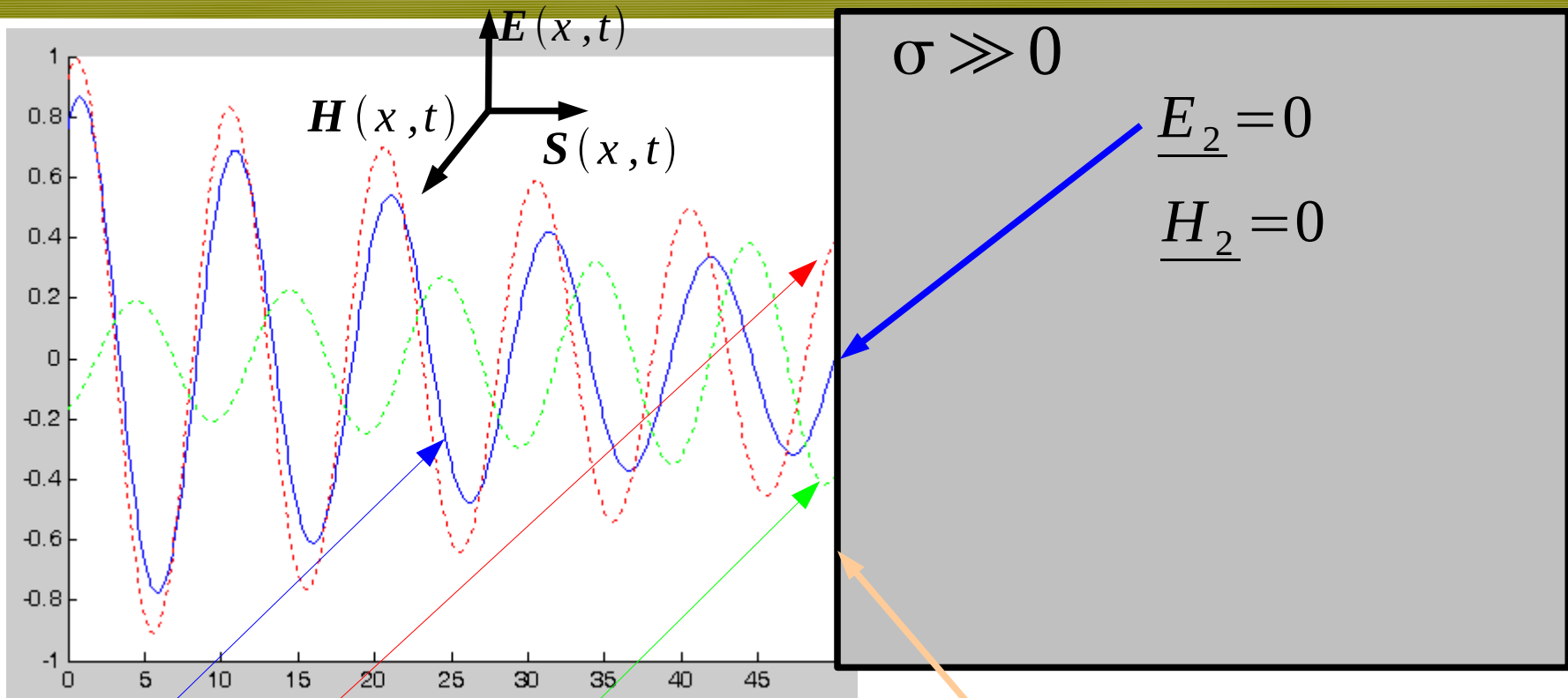
$$\underline{E}_{2p} = N \underline{E}_{1p}$$

$$\underline{H}_{2p} = Z_{c1} / Z_{c2} N \underline{H}_{1p}$$

Wsp. przejścia

$$N = \frac{2 Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$$

Fala (hfp) na granicy przewodnika



$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{1p} e^{-\Gamma_1 x} + \underline{E}_{10} e^{\Gamma_1 x}$$

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_{1p} e^{-\Gamma_1 x} + \underline{H}_{10} e^{\Gamma_1 x}$$

$$\underline{E}_{1p} + \underline{E}_{10} = \underline{E}_{2p}$$

$$\underline{H}_{1p} + \underline{H}_{10} = \underline{H}_{2p}$$

Fale poprzeczne

Fala rozchodząca się bez tłumienia ($\alpha=0$) w dodatnim kierunku osi OZ:

$$\underline{\mathbf{E}} = (E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y} + E_z \mathbf{z}) e^{-j\beta z} = (E_t \mathbf{t} + E_z \mathbf{z}) e^{-j\beta z}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = (H_x \mathbf{x} + H_y \mathbf{y} + H_z \mathbf{z}) e^{-j\beta z} = (H_t \mathbf{t} + H_z \mathbf{z}) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$



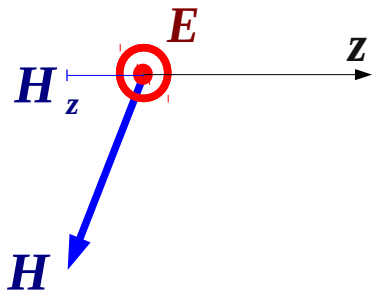
$$H_z = 0$$



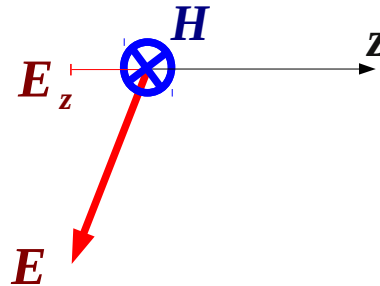
$$E_z = 0, H_z = 0$$



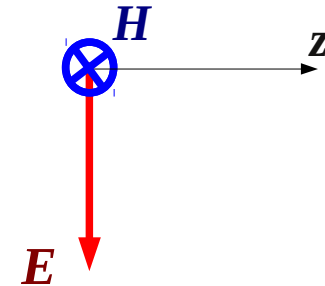
Poprzeczna elektrycznie
(Transverse Electric - TE)



Poprzeczna magnetycznie
(Transverse Magnetic - TM)



Transverse ElectroMagnetic - TEM



Fala płaska jest falą TEM

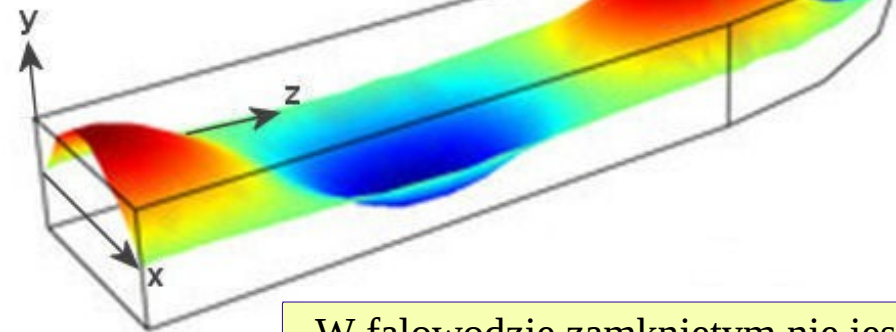
Falowody

Falowody to puste wewnątrz struktury (rury, kanały) służące do kierowania fal EM. Ich wewnętrzne ściany są pokryte dobrze przewodzącym materiałem (miedź, srebro, złoto). W rezultacie pole E jest w pobliżu ściany prostopadłe do niej, a H styczne – można sobie wyobrazić falę jak zygzak odbijający się od ścian falowodu i podążający wzdłuż niego.



E_{\perp} components of the transversal electric (TE) wave in a rectangular waveguide

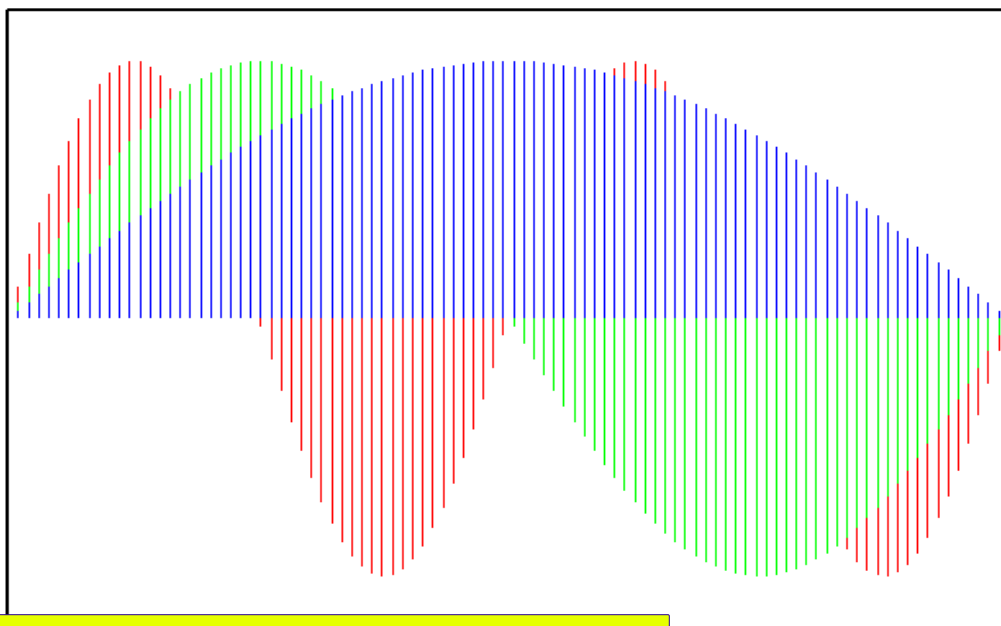
$$E_z = 0$$



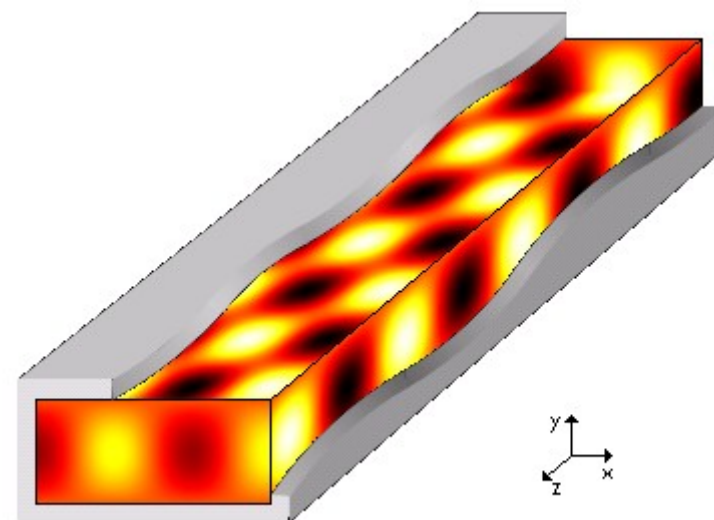
W falowodzie zamkniętym nie jest możliwa propagacja fali TEM.

Rodzaje (mody pracy)

Wyznaczenie rozkładu pola w falowodzie polega na rozwiązaniu r. Maxwella z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Dla każdego falowodu otrzymamy w ten sposób szereg rozwiązań o częstotliwościach będących wielokrotnościami pewnej granicznej wartości, poniżej której propagacja nie jest możliwa. Ta graniczna częstotliwość określa podstawowy tryb (mod) pracy falowodu.



Pole elektryczne dla modów TE10 (niebieski), TE20 (zielony) i TE30 (czerwony) w falowodzie prostokątnym.

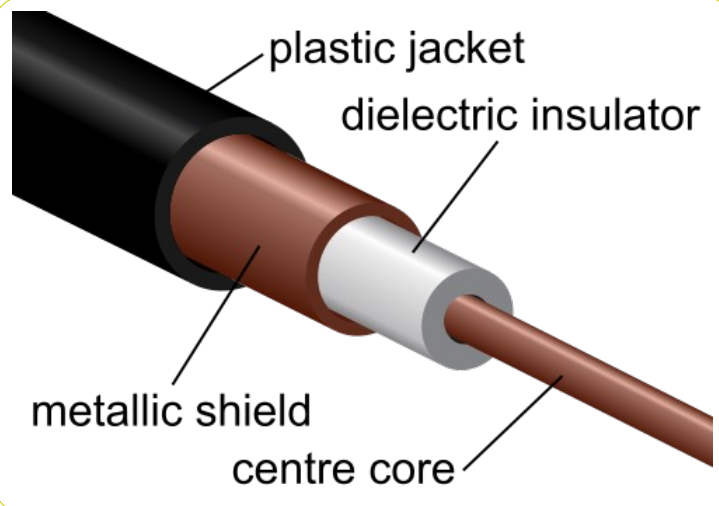


Mod 31w falowodzie prostokątnym dla $f=32$ GHz.
Pole elektryczne w kier x.
Falowód jest „rozciąty wzdłuż”, aby pokazać rozkład pola.

Created using Matlab, OfficeXP, PhotoScape by formulae from
C.A. Balanis: Advanced engineering electromagnetics (Willey, 1989)
Public domain picture from wikipedia

Kabel koncentryczny

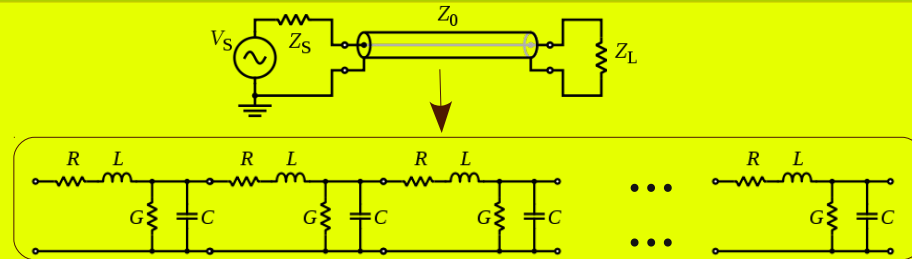
Kabel koncentryczny to przewodzący rdzeń, osłonięty warstwą dielektryka, osłoniętego przewodzącym „ekranem”.



W zakresie częstotliwości radiowych, aż do kilku GHz w kablu mamy do czynienia z falą TEM..
Powyżej częstotliwości odcięcia pojawiają się mody TE i TM – nie opłaca się więc praca powyżej tej częstotliwości (z grubsza cz. odcięcia jest odwrotnie proporcjonalna do zewnętrznej średnicy kabla).

Parametry charakterystyczne

Zwykle wygodniej jest traktować kable jako obwody. Do tego celu potrzebujemy obwodowych parametrów kabla: pojemności i indukcyjności jednostkowej. Rezystancja wzdłużna i konduktancja poprzeczna są zwykle pomijalnie małe.



$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)}$$

$$R \approx 0, G \approx \infty$$

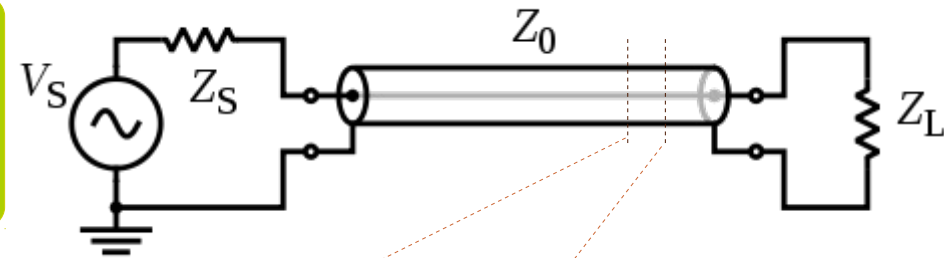
$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d)$$

d – średnica rdzenia
 D – wewnętrzna średnica ekranu

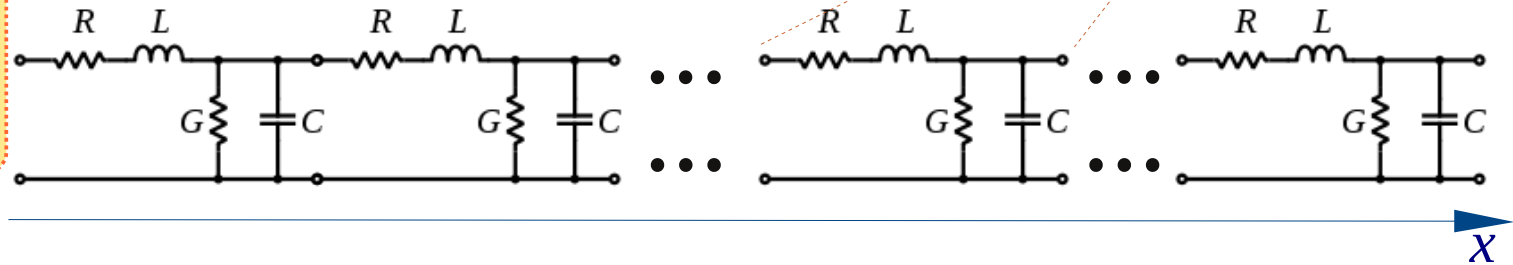
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln(D/d) \approx \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log_{10}(D/d) \Omega$$

Linia długa

Niektóre urządzenia elektryczne nie mogą być traktowane jak obwody, gdyż ich wymiary są porównywalne z długością fali. W wielu urządzeniach długość przewodów nie może być pomijana: napięcie nie może być uznane za identyczne we wszystkich punktach przewodu. Jeśli napięcie zmienia się w czasie, który jest porównywalny z czasem propagacji sygnału w przewodzie, to taki przewód należy traktować jako *linię długą*.



Równania linii długiej w obecnej postaci opublikował Oliver Heaviside w 1885, lecz już w 1855 Lord Kelvin sformułował model natężenia prądu w kablu podmorskim w postaci równania dyfuzji, co pozwoliło przewidzieć słabą efektywność transatlantyckiego telegrafu budowanego w 1858 roku.



$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -(R + j\omega L)I(x)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -(G + j\omega C)U(x)$$

$R \approx 0$
 $G \approx \infty$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \omega^2 LC \cdot U(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} + \omega^2 LC \cdot I(x) = 0$$

Parametry charakterystyczne

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (\gamma = j\omega \sqrt{LC}) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

Rozw. Równań linii długiej

$$\frac{\partial^2 \underline{U}(x)}{\partial x^2} = \gamma^2 \cdot \underline{U}(x)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}(x)}{\partial x^2} = \gamma^2 \cdot \underline{I}(x)$$

$$\underline{U}(x) = \underline{U}^+ e^{-\gamma x} + \underline{U}^- e^{\gamma x}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}^+ e^{-\gamma x} - \underline{U}^- e^{\gamma x}}{Z_0}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (\gamma = j\omega \sqrt{LC})$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}})$$

$$u(x, t) = \sqrt{2} U^+ e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi^+) + \sqrt{2} U^- e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi^-)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} \frac{V^+}{Z_0} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi^+) - \sqrt{2} \frac{V^-}{Z_0} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi^-)$$

Jeśli na początku linii napięcie i prąd to: $\underline{U}(x=0) = \underline{U}_1, \quad \underline{I}(x=0) = \underline{I}_1$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}^+ + \underline{U}^- \\ Z_0 \underline{I}_1 &= \underline{U}^+ - \underline{U}^- \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \underline{U}^+ = \frac{\underline{U}_1 + Z_0 \underline{I}_1}{2}, \quad \underline{U}^- = \frac{\underline{U}_1 - Z_0 \underline{I}_1}{2}$$

Rozw. Równań linii długiej

(kontynuacja)

$$\underline{U}(x) = \underline{U}^+ e^{-\gamma x} + \underline{U}^- e^{\gamma x}$$
$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}^+ e^{-\gamma x} - \underline{U}^- e^{\gamma x}}{\underline{Z}_0}$$

$$\underline{U}^+ = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2}, \quad \underline{U}^- = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (\gamma = j\omega \sqrt{LC}) \quad \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}})$$

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} = \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_0 \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2 \underline{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2 \underline{Z}_0} e^{\gamma x} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cosh(\gamma x) - \underline{Z}_0 \underline{I}_1 \sinh(\gamma x)$$

$$\underline{I}(x) = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} \sinh(\gamma x) + \underline{I}_1 \cosh(\gamma x)$$

Napięcie i prąd w odległości x od początku linii można wyrazić przez napięcie i prąd na początku.

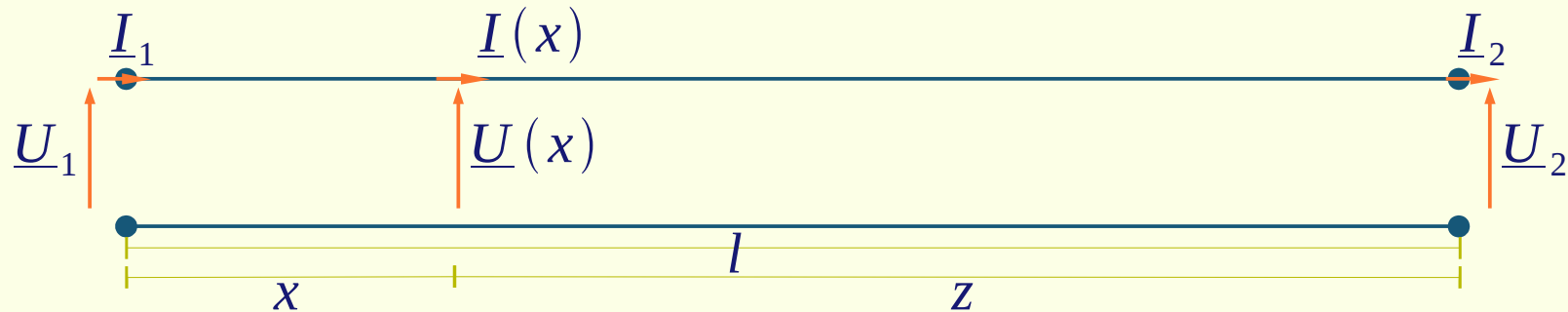
Rozw. Równań linii długiej

(kontynuacja)

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cosh(\gamma x) - \underline{Z}_0 \underline{I}_1 \sinh(\gamma x)$$

$$\underline{I}(x) = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} \sinh(\gamma x) + \underline{I}_1 \cosh(\gamma x)$$

Napięcie i prąd w odległości x od początku linii można wyrazić przez napięcie i prąd na początku.



$$\underline{U}(z) = \underline{U}_2 \cosh(\gamma z) + \underline{Z}_0 \underline{I}_2 \sinh(\gamma z)$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \sinh(\gamma z) + \underline{I}_2 \cosh(\gamma x)$$

Napięcie i prąd w odległości x od końca linii można wyrazić przez napięcie i prąd na końcu linii.

Podstawiając $x=l$ w pierwszym zestawie lub $z=l$ w drugim, otrzymamy relację U, I na końcach linii.