

Podstawy elektromagnetyzmu

Wykład 12

Energia PEM

Energia pola elektromagnetycznego

Pole elektryczne

$$W_E = \iiint_V w_E dV$$

$$w_E = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

Pole magnetyczne

$$W_H = \iiint_V w_H dV$$

$$w_H = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$$

Całkowita energia

$$\begin{aligned} W &= \iiint_V (w_E + w_H) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\varepsilon E^2 + \mu B^2) dV \end{aligned}$$

Objętościowa gęstość energii EM

$$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}$$

Dotyczy to tylko materiałów liniowych i niedyspersyjnych

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

Zmiana energii w czasie

Przeanalizujemy pochodną energii po czasie

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \iiint_V \left(\frac{\partial w_E}{\partial t} + \frac{\partial w_H}{\partial t} \right) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} + \mu \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) dV = \\ &= \iiint_V \left(\epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV = \\ &= \iiint_V \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \sigma E^2 - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) dV = \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad \text{Tożsamość dla wektorów}$$

$$= - \iiint_V \sigma E^2 dV - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV =$$

$$= - \iiint_V \sigma E^2 dV - \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \times \mathbf{H} dS$$

R-nia Maxwella

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

Twierdzenie Stokesa

Pierwszy składnik prawej strony to energia zamieniająca się w ciepło. Drugi składnik odpowiada za zmianę energii w (małej) objętości.

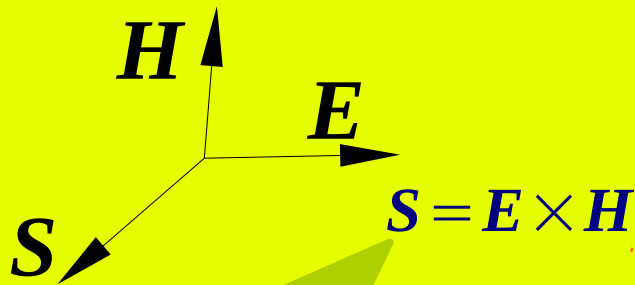
Zmiana energii w czasie

(kontynuacja)

Interpretacja

Moc przekształcająca się w ciepło. Zmiana jest ujemna, gdyż energia - jest "tracona" (fdla PEM;-)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_V \left(\frac{\partial w_E}{\partial t} + \frac{\partial w_H}{\partial t} \right) dV = - \iiint_V \sigma E^2 dV - \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \times \mathbf{H} dS$$



Wektor Poyntinga reprezentuje gęstość strumienia mocy EM.

Jednostki: W/m^2

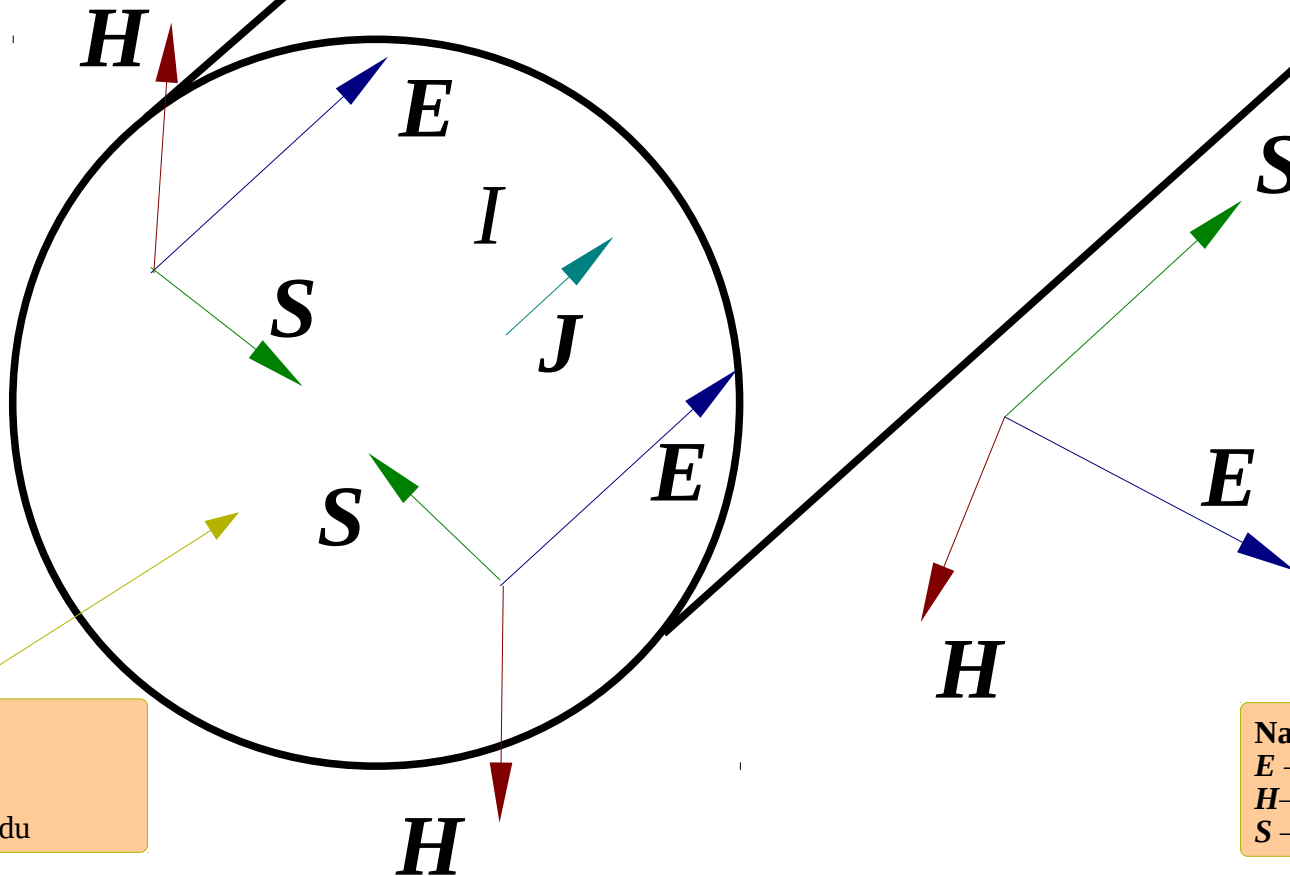
Moc wypromieniowywana przez brzeg małej objętości V . Jest ujemna lub dodatnia w zależności od znaku (zwrotu) wektora $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ względem wektora normalnego do ∂V (brzegu V).

Wektor Poyntinga został wynaleziony równolegle przez Johna Henry'ego Poynting, Olivera Heaviside i Nikolaja Umowa. Umow opublikował Pracę 10 lat wcześniej, niż Poynting, ale pisał o transferze energii w ciałach stałych i cieczach.

Przykład

Prosty, długi przewód z prądem stałym

$$S = E \times H$$



Wewnątrz:
 E – wzdłuż przewodu
 H – wokół osi
 S – do wnętrza przewodu

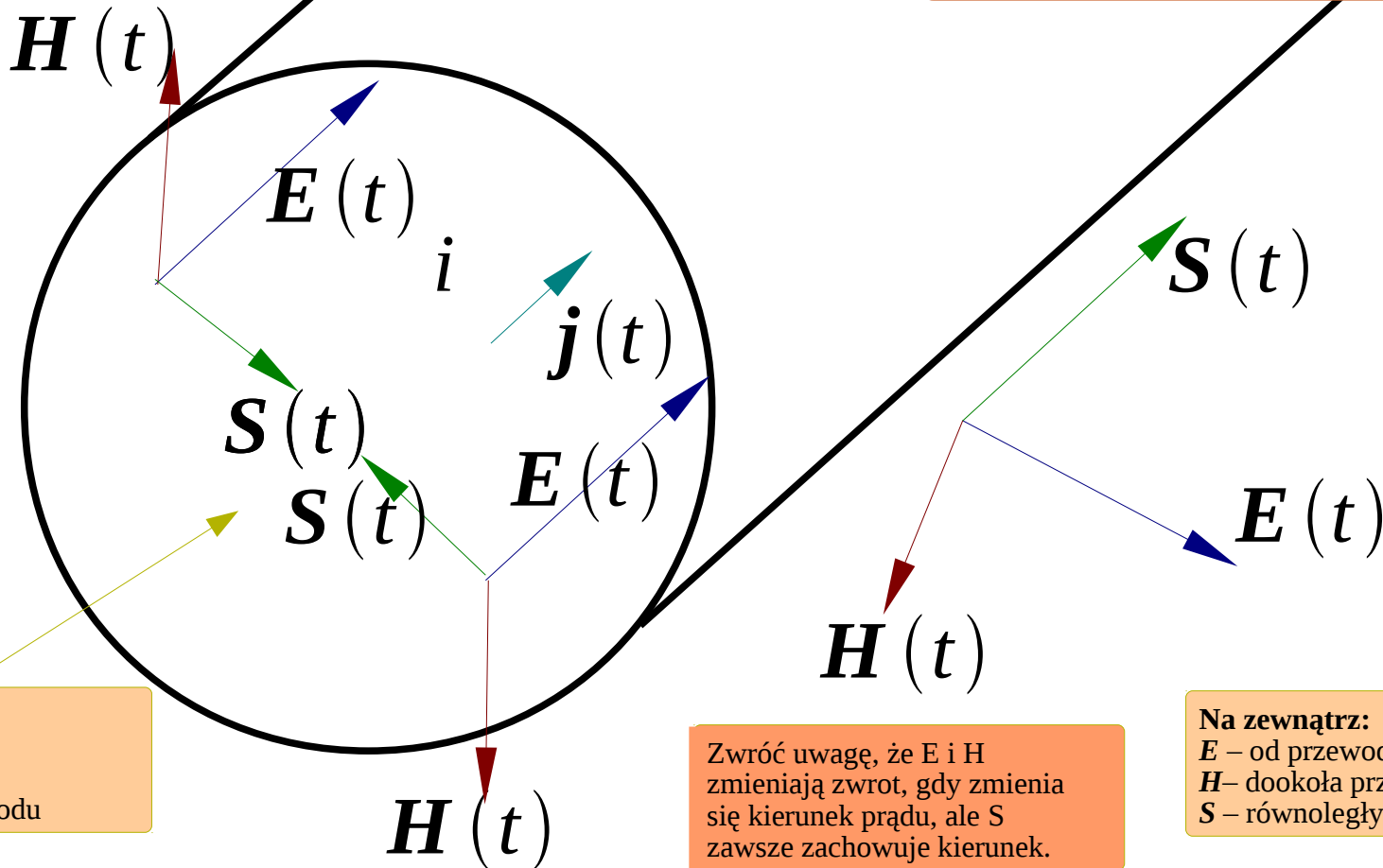
Na zewnątrz:
 E – od przewodu na zewnątrz
 H – dookoła przewodu
 S – równoległy do przewodu

Przykład

(kontynuacja)

Długi prosty przewód z prądem przemiennym

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t)$$



Wewnątrz:
 E – wzdłuż przewodu
 H – wokół osi
 S – do wnętrza przewodu

Zwróć uwagę, że E i H zmieniają zwrot, gdy zmienia się kierunek prądu, ale S zawsze zachowuje kierunek.

Na zewnątrz:
 E – od przewodu na zewnątrz
 H – dookoła przewodu
 S – równoległy do przewodu

Przykład

(kontynuacja)

Długi prosty przewód ze stałym prądem I

Wewnątrz:

$$\mathbf{J} = J \mathbf{z}, \quad J = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\mathbf{E} = E \mathbf{z}, \quad E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\pi \sigma R^2}$$

$$\mathbf{H} = H(r) \boldsymbol{\phi}, \quad H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

$$\mathbf{S} = S(r) \mathbf{r} = E H(r) = \frac{I^2 r}{2\pi^2 \sigma R^4}$$

Strumień S przez zewnętrzną pow. przewodu

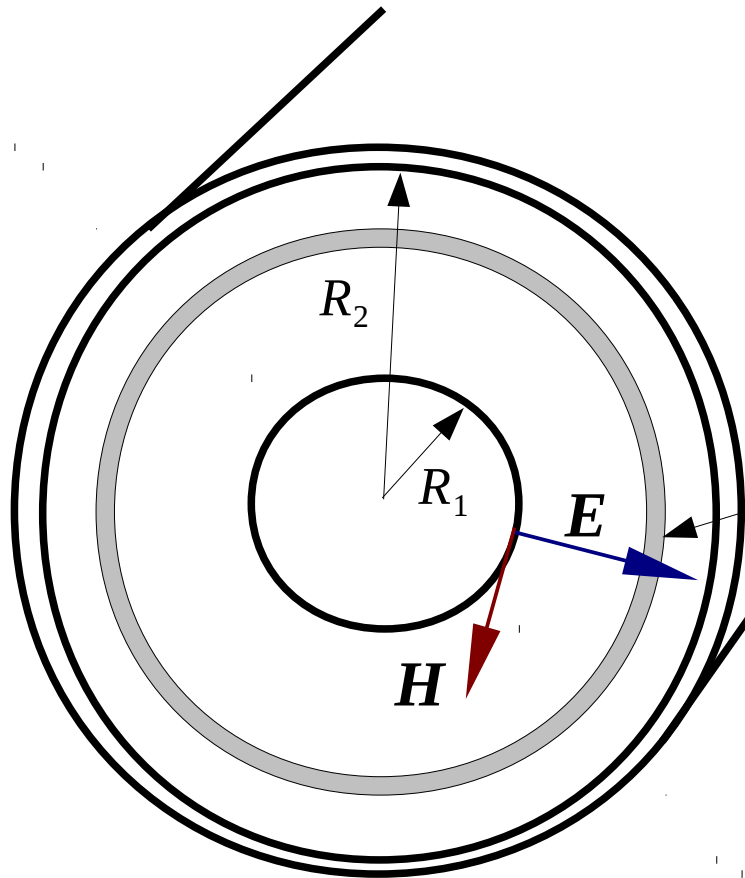
$$\begin{aligned} \iint_O \mathbf{S} dO &= 2\pi R l \cdot S(R) = \\ &= \frac{2\pi R l I^2 R}{2\pi^2 \sigma R^4} = I^2 \frac{l}{\sigma \pi R^2} \end{aligned}$$

$$\frac{l}{\sigma \pi R^2} \quad \text{– rezystancja walca } (R, l)$$

Strumień wektora Poyntinga przez zewnętrzną powierzchnię jest równa mocy zamieniającej się w przewodzie w ciepło.

Energia wnika do wnętrza metalu (przewodnika) i zamienia się tam w ciepło.

Wektor Poyntinga w kablu koncentrycznym



Strumień wektora Poyntinga przez poprzeczny przekrój izolacji jest równy mocy przekazywanej kablem.

Strumień wektora S przez przekrój poprzeczny izolacji

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi r}$$

$$E_r = \frac{U}{r \ln(R_2/R_1)}$$

$$S_z = \frac{U I}{2\pi r^2 \ln(R_2/R_1)}$$

$$dp = S_z 2\pi r dr$$

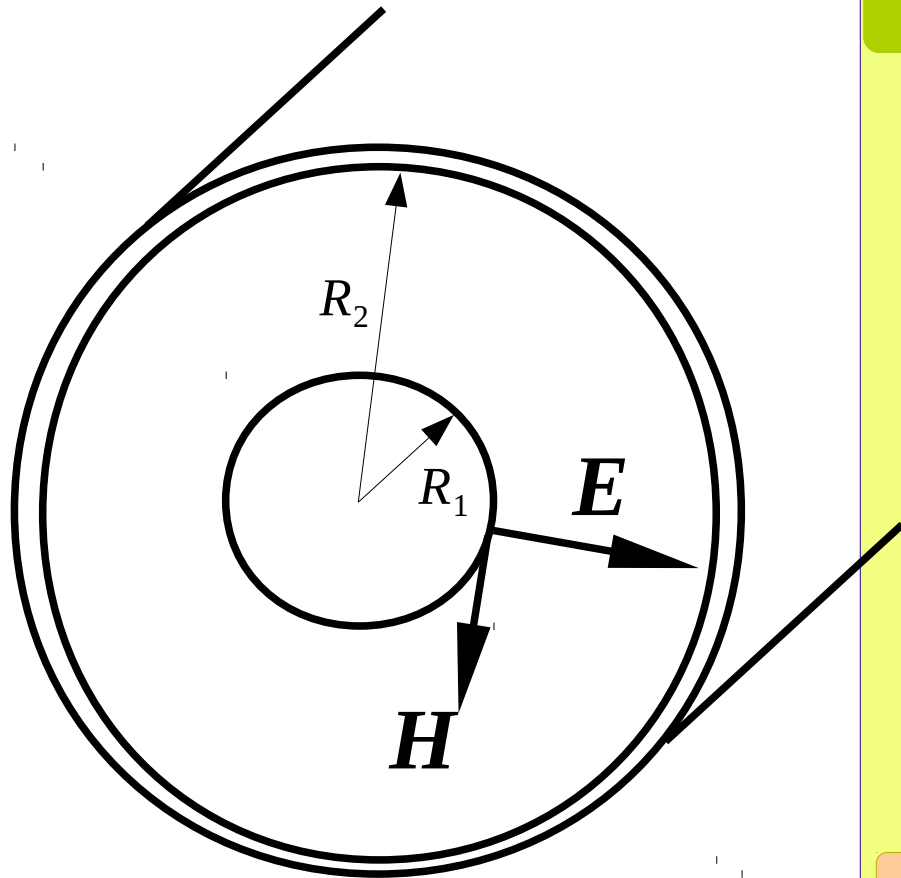
$$P = \int_{R_1}^{R_2} dp = \frac{U I}{\ln(R_2/R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr =$$

$$= \frac{U I}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

$$P = U I$$

Kabel koncentryczny

(kontynuacja)



Ten sam wynik otrzymamy dla przewodzącego ekranu: energia wnika w przewodnik i zmienia się tam w ciepło.

Strumień S przez zewnętrzną powierzchnię żyły:

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi R_1} \quad E_z = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

$$\mathbf{S}(R_1) = \mathbf{E}(R_1) \times \mathbf{H}(R_1)$$

$$S = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma R_1^3}$$

$$\iint_O S dO = 2\pi R_1 l \cdot S = I^2 \cdot \frac{l}{\pi \sigma R_1^2}$$

Jak poprzednio, strumień wektora Poyntinga jest równy mocy zamienianej na ciepło.

Energia wnika w przewodnik i zmienia się tam w ciepło.

Wektor Poyntinga dla pól harmonicznych

$$\underline{S} = \frac{1}{2} (\underline{E} \times \underline{H}^*) = P + jQ$$

$$P = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_s (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS$$

$$Q = \operatorname{Im} \frac{1}{2} \oint_s (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS$$

Moc w obwodzie elektrycznym

$$S = P + jQ$$

Zespolony wektor Poyntinga pozwala wyznaczać parametry obwodowe dla przebiegów sinusoidalnych.

$$\underline{Z} = \frac{1}{I^2} \left[\frac{1}{2} \oint_s (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS \right]$$

$$R = \frac{1}{I^2} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_s (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS \right]$$

$$X = \frac{1}{I^2} \left[\operatorname{Im} \frac{1}{2} \oint_s (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS \right]$$

Siły mechaniczne

Pole elektryczne

$$f_e = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon$$

Pole magnetyczne

$$f_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} H^2 \nabla \mu$$

Pole elektromagnetyczne

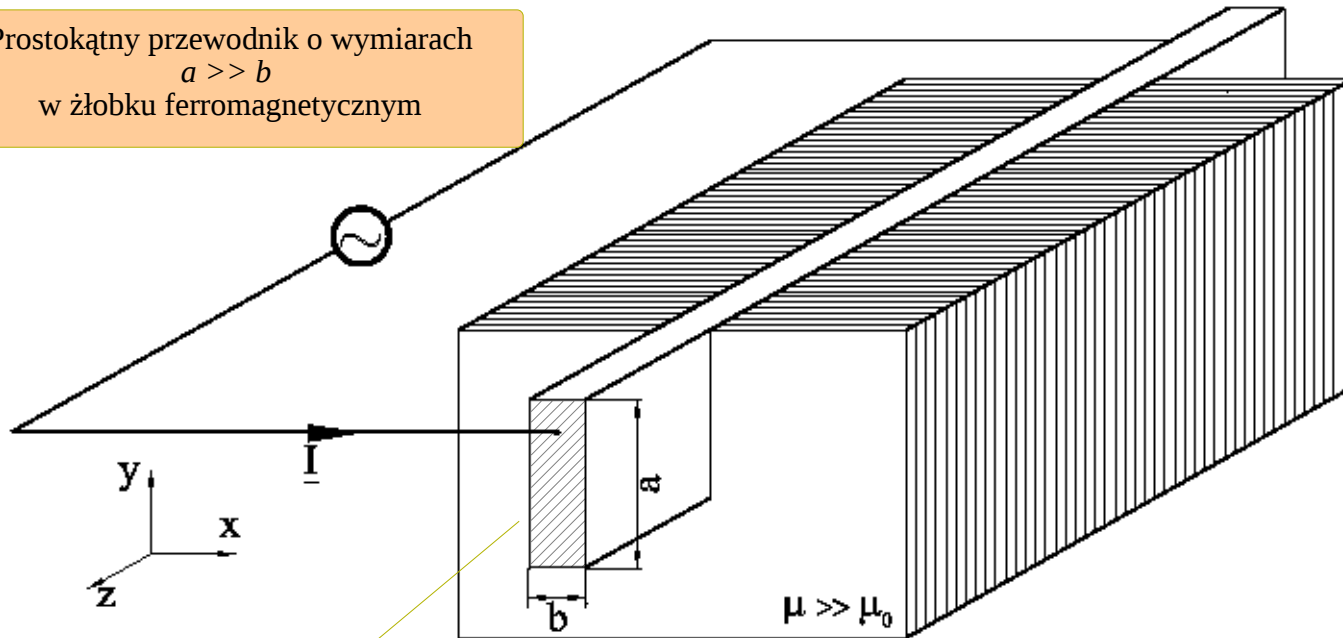
$$f_{em} = f_e + f_m + \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p = \varepsilon \mu (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$



Efekt naskórkowości

Prostokątny przewodnik o wymiarach $a \gg b$ w żłobku ferromagnetycznym



Jeżeli założymy, że ferromagnetyk się nie nasyca, a $s \gg b$, to możemy przyjąć uproszczony model pola:

$$\underline{H} = [H_x(y), 0, 0]$$

$$\underline{J} = [0, 0, J_z(y)]$$

Rozwiązanie takiego modelu pokazuje, że prąd jest wypierany ze żłobka i płynie tylko w części przewodu położonej blisko pow. żłobka.

$\int_L \underline{H} dl = I$
 $b \cdot H(a) = I$

$$\frac{\partial^2 \underline{H}(y)}{\partial y^2} - \underline{\Gamma}^2 \underline{H}(y) = 0$$

$$\underline{H}(0) = 0,$$

$$\underline{H}(a) = \frac{I}{b}$$

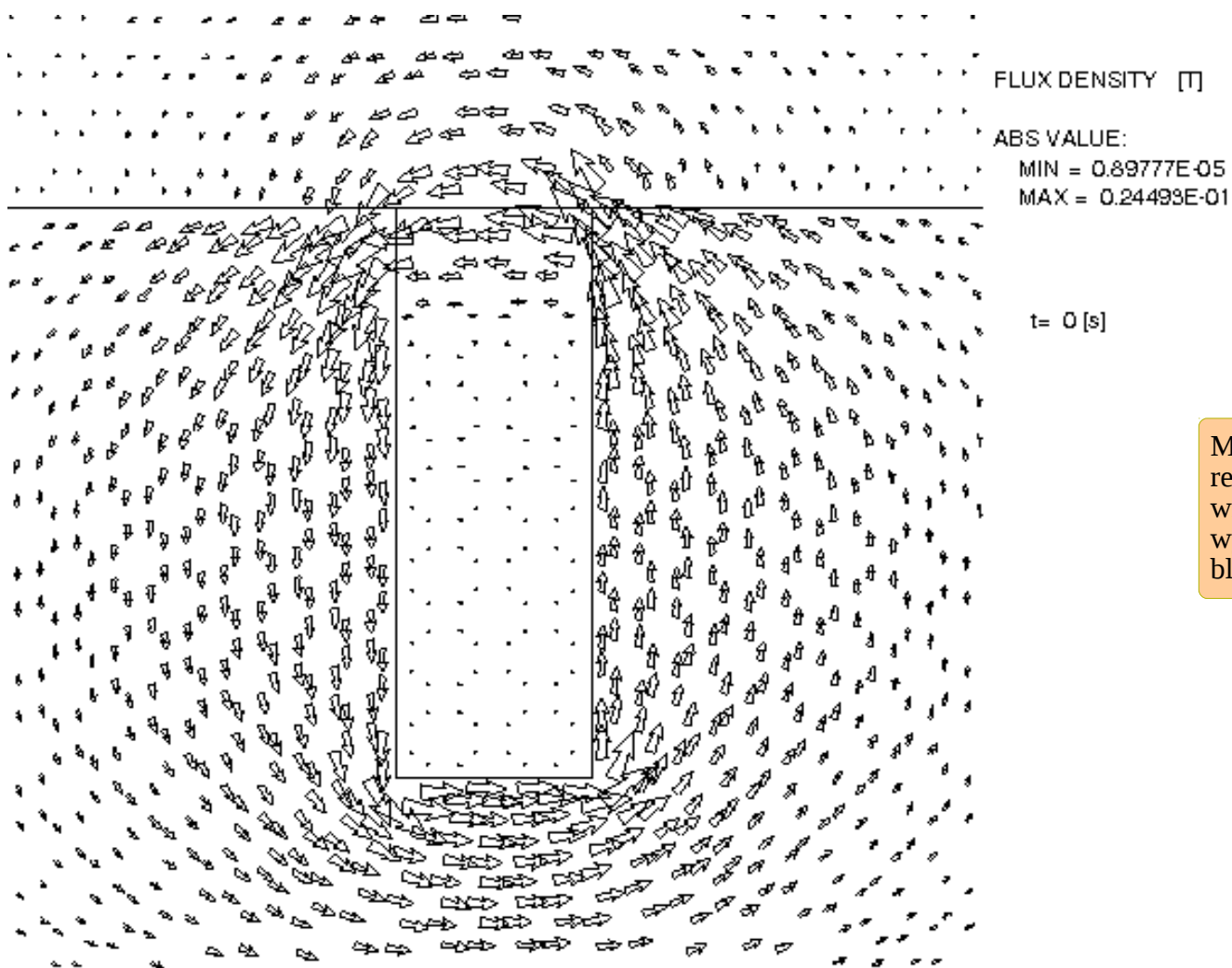
$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}$$

$$J_z(y) = -\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$\underline{H}(y) = \frac{I \sinh(\underline{\Gamma} y)}{b \sinh(\underline{\Gamma} a)}$$

$$\underline{J}(y) = \frac{I \underline{\Gamma} \cosh(\underline{\Gamma} y)}{b \sinh(\underline{\Gamma} a)}$$

Model numeryczny

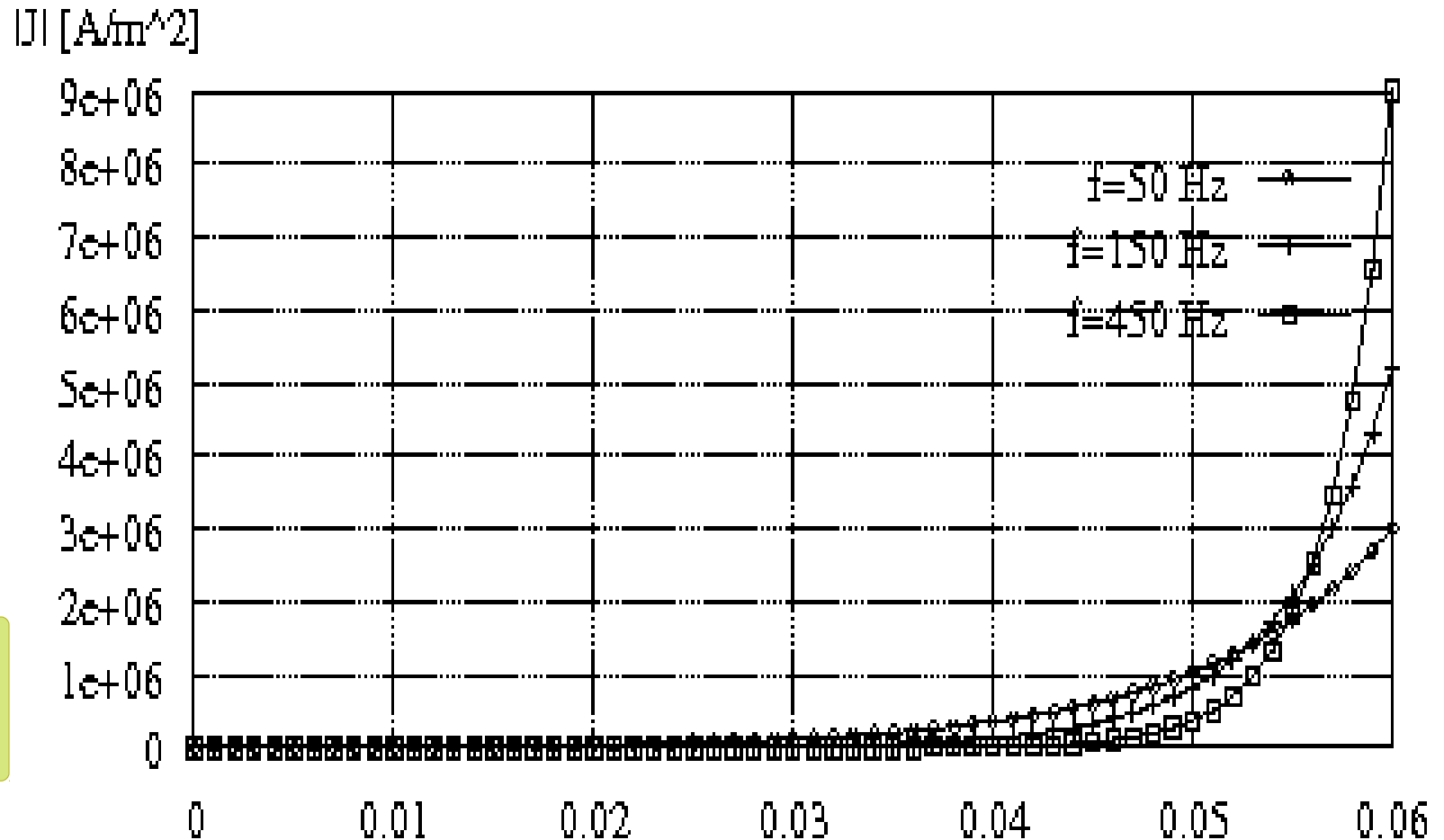


Model jest znacznie bardziej realistyczny, ale płynące z niego wnioski są podobne: prąd jest wypierany ku górze i płynie tylko blisko pow, żłobka.

Wpływ częstotliwości

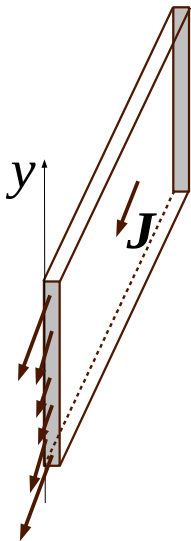
Zwiększenie częstotliwości uwypukla efekt: dla dużych częstotliwości można przyjąć, że prąd płynie tylko po powierzchni przewodu.

Zjawisko jest wykorzystywane przy hartowaniu powierzchniowym oraz w testowaniu niszczącym (metody wieloczęstotliwościowe).

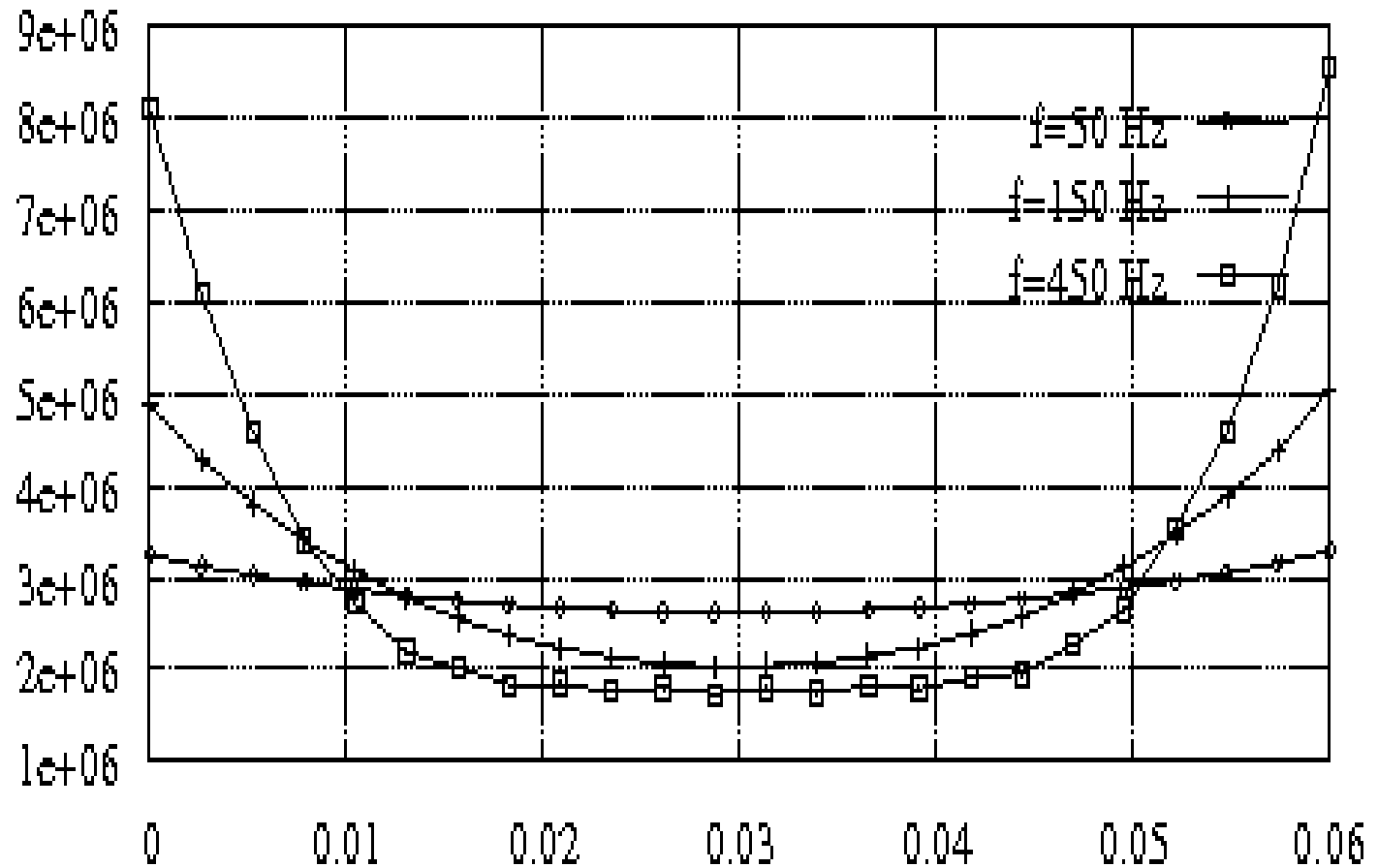


Przewód w powietrzu

Jeżeli wyjmiemy przewód ze żłobka, to zjawisko staje się symetryczne: prąd jest wypierany w górę i w dół (oczywiście także na lewo i prawo, ale to jest mniej widoczne, gdyż $a \gg b$).



$|J|$ [A/m²]



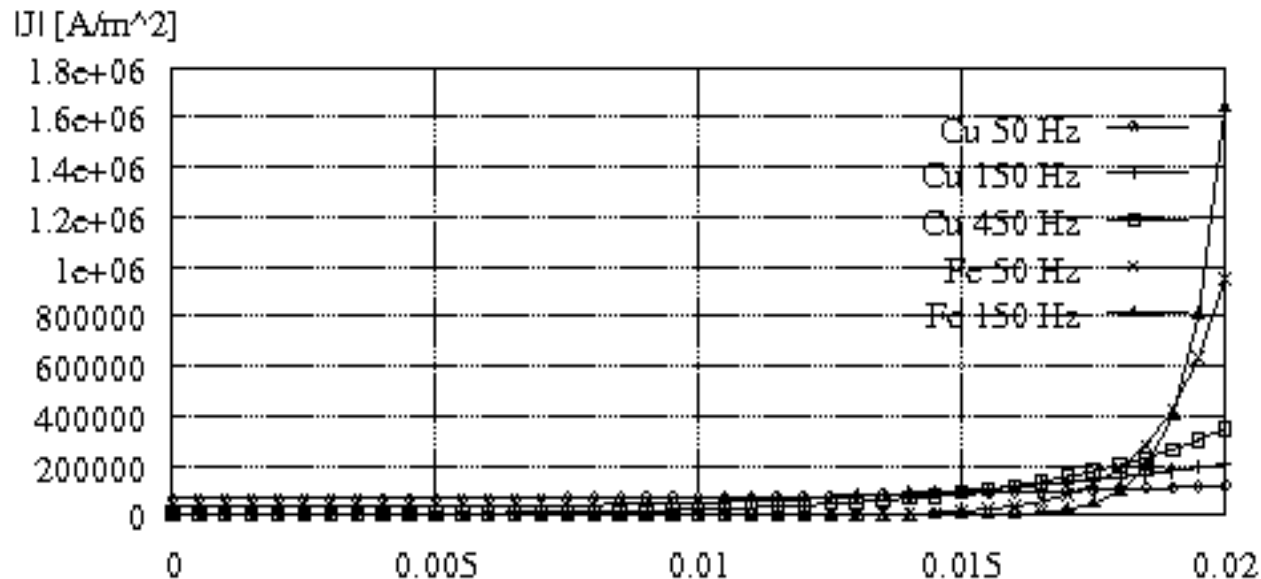
Przewód cylindryczny

W przewodzie cylindrycznym prąd jest wypierany osiowo-symetrycznie, ku powierzchni cylindra.

$$\frac{d^2 \underline{J}}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{J}}{d r} - j \omega \sigma \mu \underline{J} = 0$$

Funkcja Bessela

$$\underline{J}(r) = \frac{\underline{I} \sqrt{-j \omega \sigma \mu} J_0(\sqrt{-j \omega \sigma \mu} r)}{2 \pi R J_1(\sqrt{-j \omega \sigma \mu} R)}$$



Silny efekt naskórkowości – uproszczenia

Kiedy możemy go stosować?

Grubość przewodnika \gg Głębokość wnikania

Jak?

Analizujemy falę EM wnikającą w przewodnik.

Głębokość wnikania:
$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$$

$$\underline{H}(r) = \underline{H}_s e^{-\underline{\Gamma}(R-r)} \quad \underline{H}_s = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\underline{J}(r) = \underline{H}_s \sqrt{\omega \sigma \mu} e^{j\pi/4} e^{-\underline{\Gamma}(R-r)}$$

Efekt zbliżenia

CURRENT DENSITY (A/m^2)

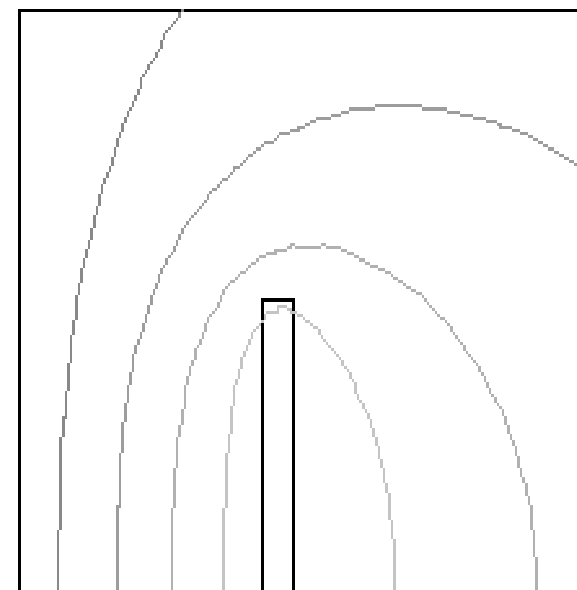
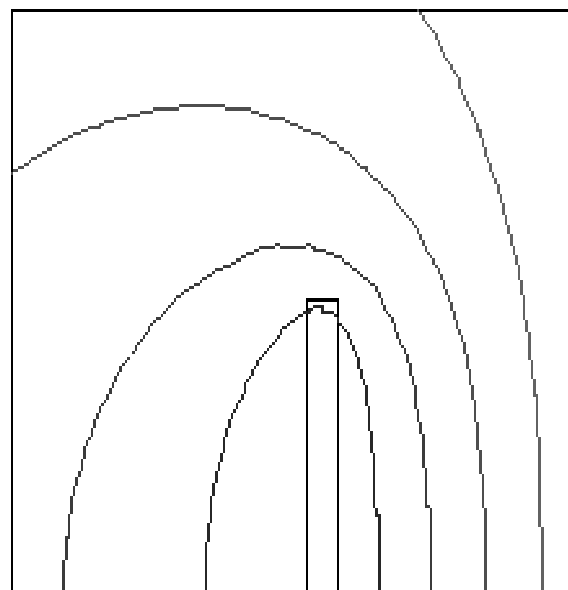
- $\geq 0.47407E+04$
- $\geq 0.58502E+04$
- $\geq 0.69600E+04$
- $\geq 0.80697E+04$
- $\geq 0.91794E+04$
- $\geq 0.10289E+05$
- $\geq 0.11399E+05$
- $\geq 0.12508E+05$
- $\geq 0.13618E+05$
- $\geq 0.14728E+05$
- $= 0.15838E+05$

$I_{total} = 5.1519 A$

$I_{re} = -0.76757$

$I_{im} = 5.0944$

$f = 50 Hz$



Ekran elektromagnetyczny

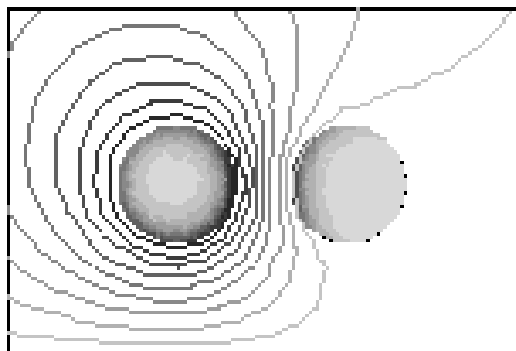
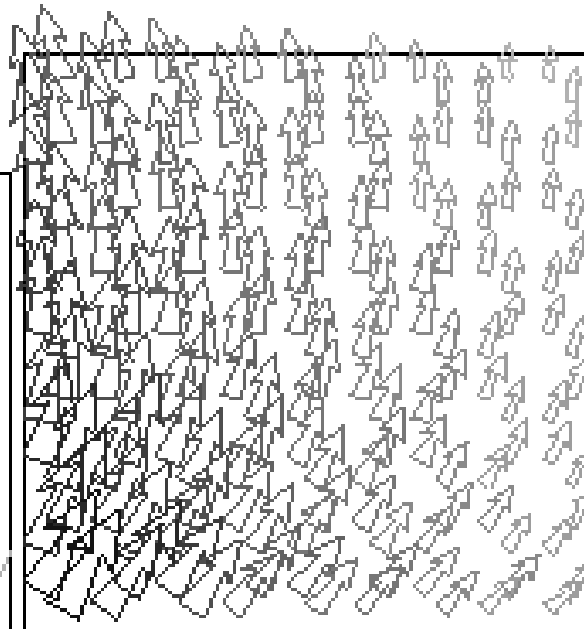
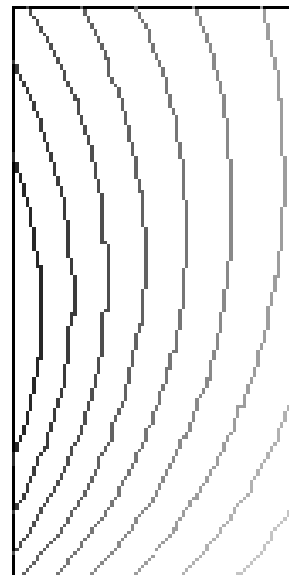
ARROWS SHOW FIELD INTENSITY

MIN $|H| = 48.851 \text{ A/m}$

MAX $|H| = 170.14 \text{ A/m}$

$t = 0 \text{ ms}$

$f = 50 \text{ Hz}$



floor level

Ekran elektromagnetyczny

(kontynuacja)

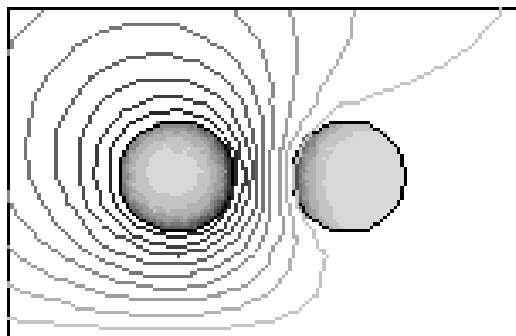
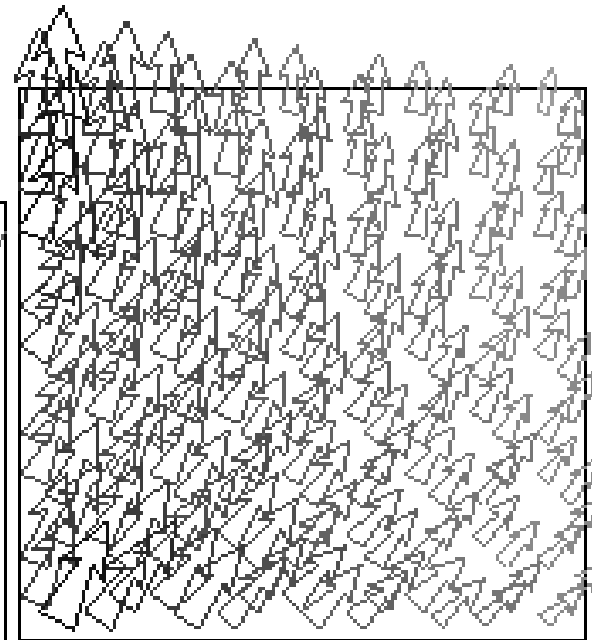
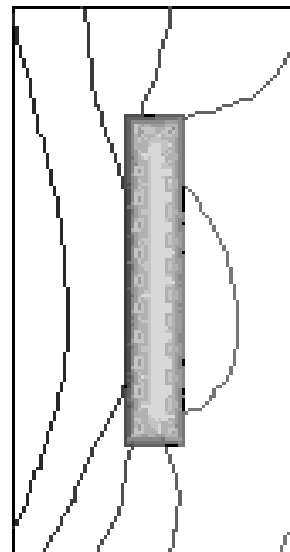
ARROWS SHOW FIELD INTENSITY

MIN $|H| = 36.667 \text{ A/m}$

MAX $|H| = 90.987 \text{ A/m}$

$t = 0 \text{ ms}$

$f = 50 \text{ Hz}$



floor level