

Podstawy elektromagnetyzmu

Wykład 12

Numeryczna symulacja pola elektromagnetycznego

Równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ruch ładunków jest źródłem pola magn.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Zmienne w czasie pole magn. jest źródłem wirowego pola elektrycznego.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Źródłem pola elektrycznego są ładunki.
Nie ma ładunków magnetycznych.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Przybliżony ciągły model oddziaływania pola z materią

Potencjały

Elektrostatyka:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \rightarrow \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$$

Magnetostatyka

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Pole elektromagnetyczne

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

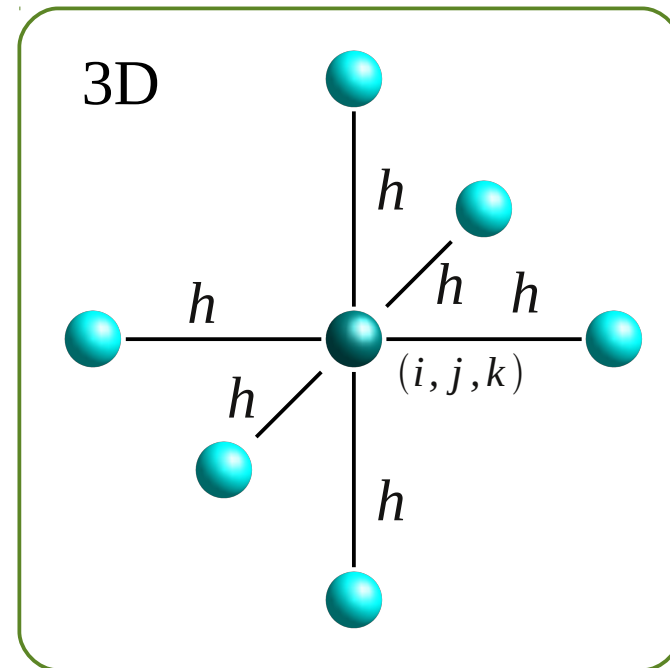
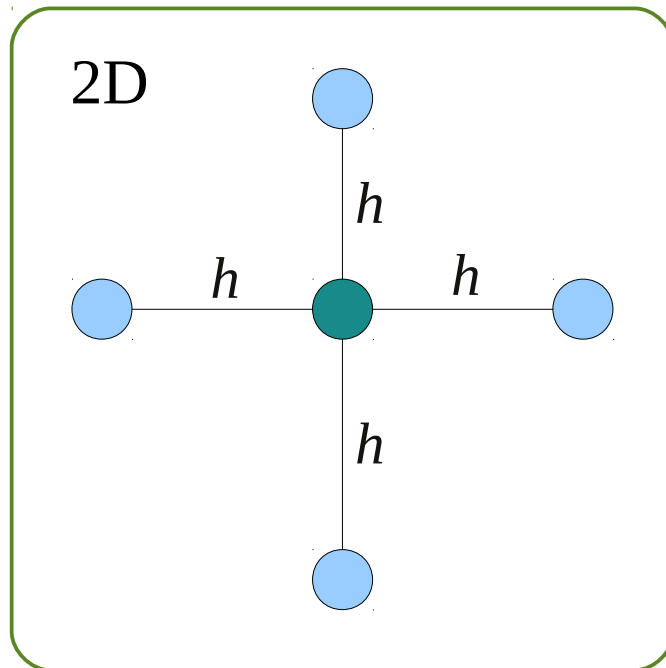
$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$$

W wielu sytuacjach potencjały są wygodniejsze, niż \mathbf{E} lub \mathbf{H} – łatwiej zadawać warunki brzegowe, itp.

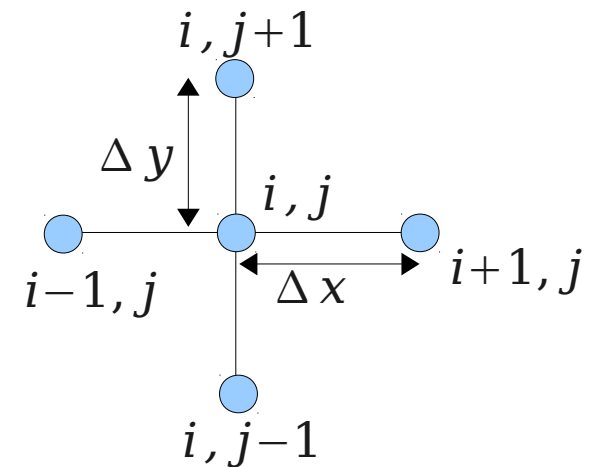
Metoda różnic skończonych

- Aproksymacja pochodnych przez ilorazy różnicowe
- Pole wyznaczane w dyskretnych punktach (węzłach)
- Punkty są organizowane w powtarzalne szablony
- Wartości między węzłami są interpolowane



Równanie Poissone'a, 2D

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(i, j) \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i, j) = \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{x_{i+1, j} - x_{i, j}}$$

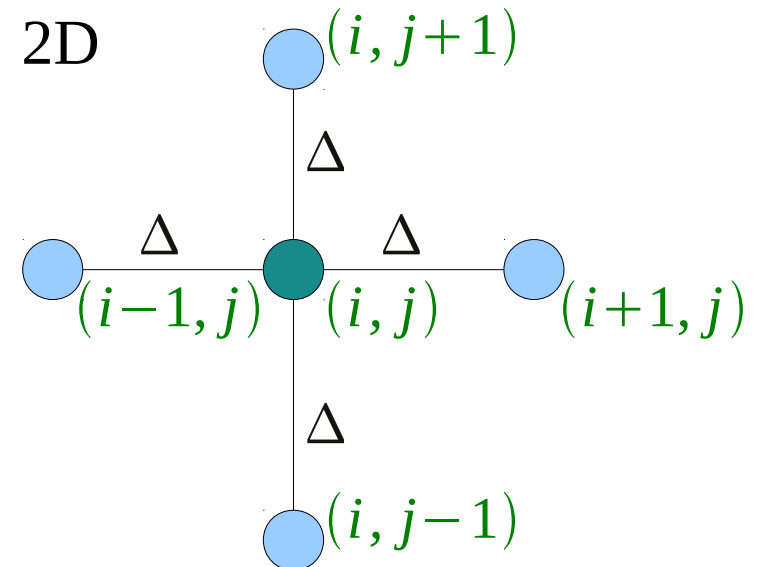
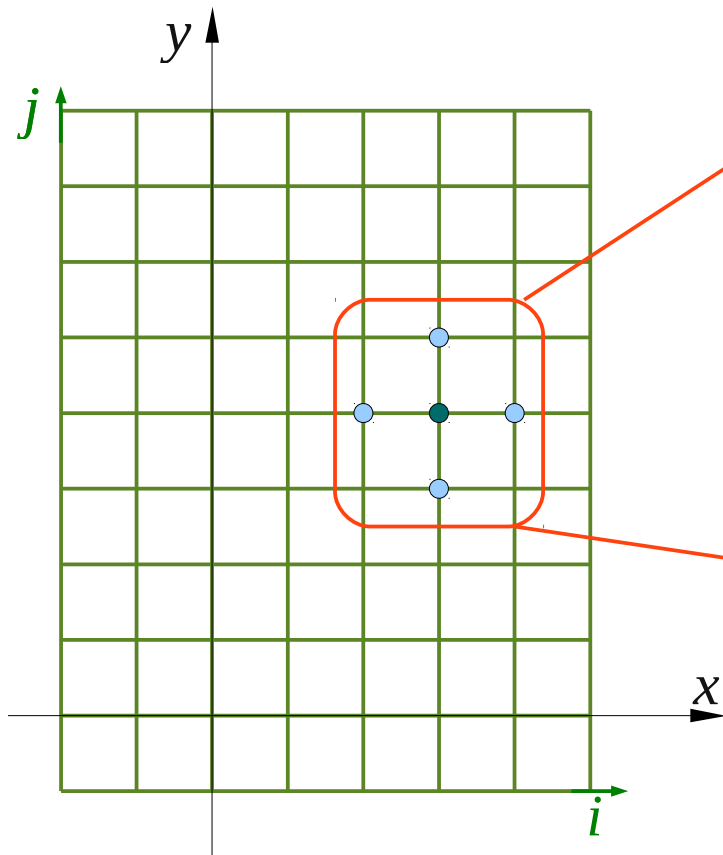
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i, j) - \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}(i-1, j)}{\Delta x} = \frac{\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 2\varphi_{i, j}}{(\Delta y)^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{A} \cdot \Phi = \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

Jednorodna (krata) siatka



$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = \frac{\rho}{\epsilon} \Delta^2$$

Oszacowanie błędu

Szereg Taylora

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (\Delta x)^3 + \dots$$

Dla $\Delta x \rightarrow 0$

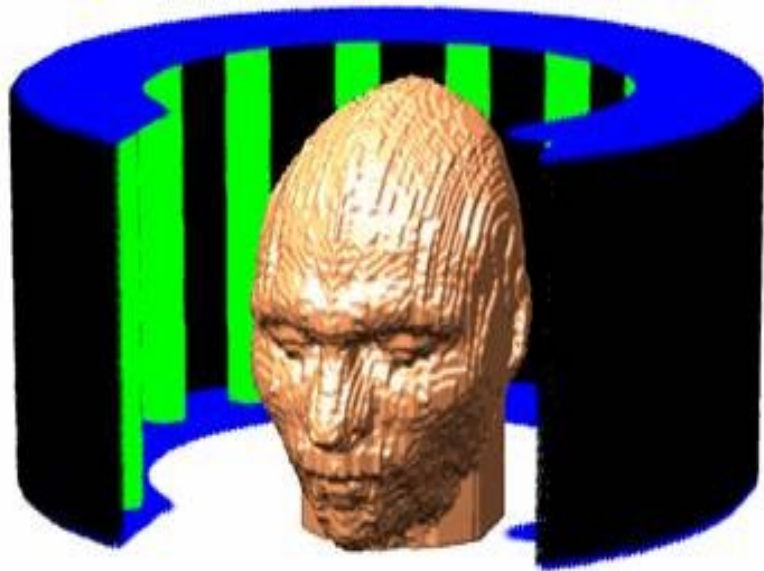
$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + O(\Delta x)^2$$

otrzymamy

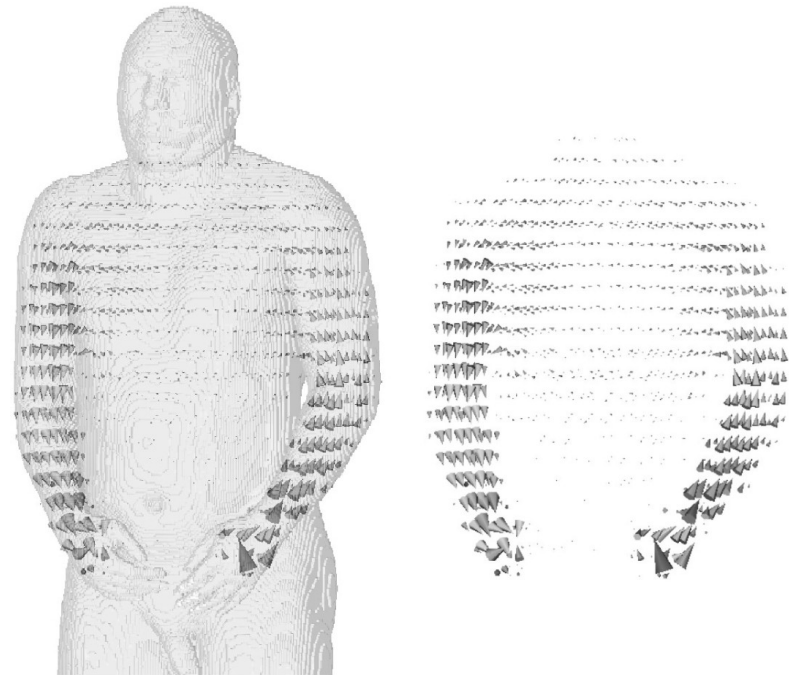
$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

Dla centralnej, symetrycznej aproksymacji błąd $O(\Delta^2)$,
dla niesymetrycznej błąd jest większy: $O(\Delta)$

Złożone siatki



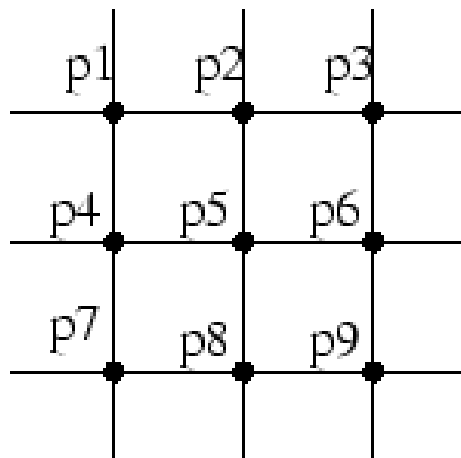
<http://esl.eng.ohio-state.edu>



<http://www.emeraldinsight.com/>

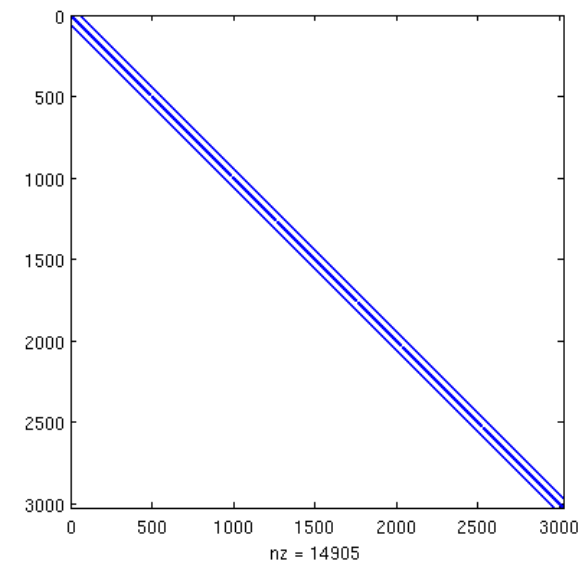
Model numeryczny

$$-\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1} + 4\varphi_{i,j} = -\frac{\rho}{\epsilon} \Delta^2$$

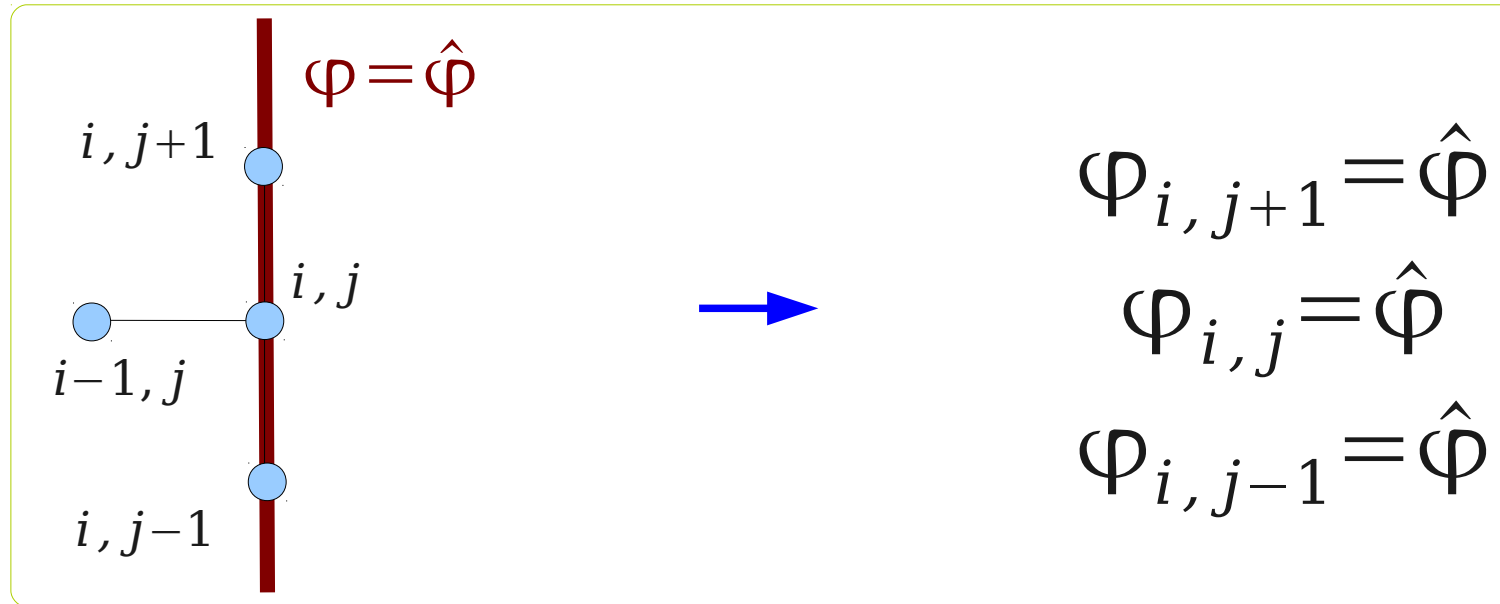


$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Każdy węzeł jest „połączony” tylko z sąsiadami. Węzły są numerowane kolejno, kolumnami lub wierszami. Niezależnie od sposobu, węzeł n będzie połączony tylko z węzłami $n-1$, $n+1$, $n-S$, $n+S$, gdzie S to liczba wierszy lub kolumn. W rezultacie macierz układu równań ma charakterystyczne k -diagonalne wypełnienie. $k=3$ dla siatek 1D, $=5$ dla siatek 2D i 7 dla siatek 3D.



Warunki brzegowe Dirichleta

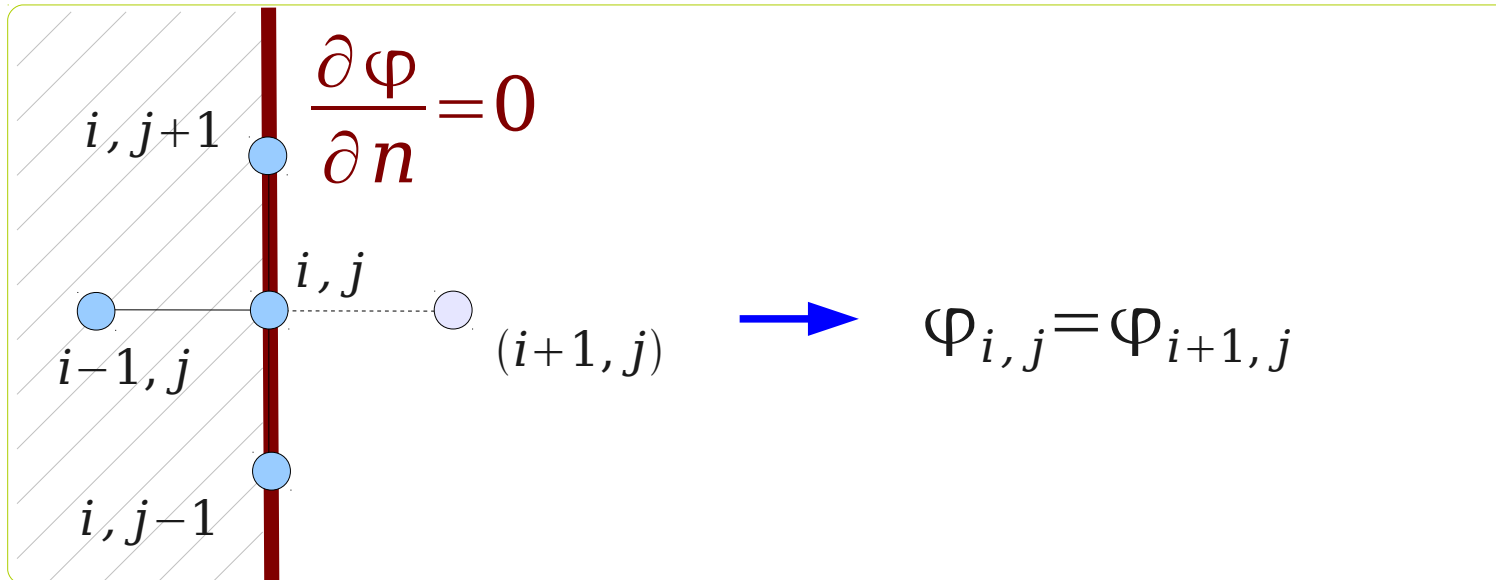


Jeżeli znamy wartości potencjału na jakiejś części brzegu, to po prostu zadajemy te wartości jako znane – w odpowiednich węzłach leżących na brzegu.

Takie warunki brzegowe można wprowadzić wprost do układu równań algebraicznych zastępując oryginalne równania przez spreparowane:

$$\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} + \varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 4\varphi_{i, j} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2 \rightarrow \varphi_{i, j} = \hat{\varphi}$$

Jednorodne warunki Neumanna

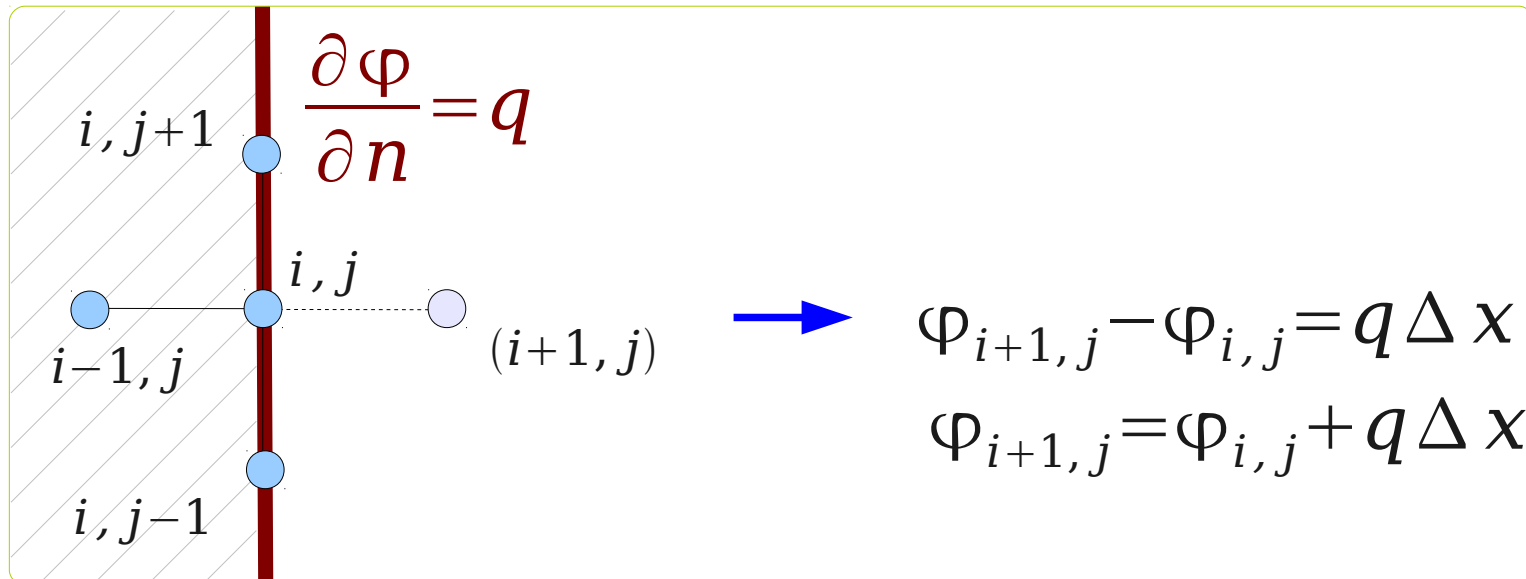


Jednorodny, zerowy warunek Neumanna oznacza, że potencjał nie zmienia się w kierunku normalnym (prostopadłym) do brzegu. Wprowadzenie takiego warunku można interpretować jako „dodanie” do siatki węzła położonego na zewnątrz obszaru i zadanie w tym węźle potencjału identycznego, jak w węźle brzegowym:

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 3\varphi_{i+1,j} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2$$

Niejednorodne war. Neumanna



W przypadku niejednorodnego warunku Neumanna znamy wielkość o jaką zmienia się potencjał w kierunku prostopadłym do brzegu. Możemy więc wprowadzić do siatki „sztuczny” węzeł, położony na zewnątrz obszaru i wyznaczyć różnicę pomiędzy potencjałem tego węzła i potencjałem węzła brzegowego:

$$\varphi_{i-1, j} + \varphi_{i+1, j} + \varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 4\varphi_{i, j} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_{i-1, j} + \varphi_{i, j-1} + \varphi_{i, j+1} - 3\varphi_{i+1, j} = -q \Delta x + \frac{\rho}{\varepsilon} \Delta^2$$

Zagadnienia niestacjonarne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L \left(t, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \right)$$

$$\frac{\varphi^{t+1} - \varphi^t}{\Delta t} = L^t \left(t, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \right)$$

Euler w przód

$$\frac{\varphi^{t+1} - \varphi^t}{\Delta t} = L^{t+1} \left(t, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \right)$$

Euler w tył

$$\frac{\varphi^{t+1} - \varphi^t}{\Delta t} = \Theta L^{t+1} + (1 - \Theta) L^t$$

Crank-Nicholson

$$\Theta \in \langle 0, 1/2 \rangle$$

Przykład – równanie przewodnictwa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\varphi^{t+1} - \varphi^t}{\Delta t} = \Theta L^{t+1} + (1 - \Theta) L^t$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{t+1} - \varphi_{i,j}^t}{\Delta t} = & \kappa \Theta \frac{\varphi_{i-1,j}^{t+1} + \varphi_{i+1,j}^{t+1} + \varphi_{i,j-1}^{t+1} + \varphi_{i,j+1}^{t+1} - 4\varphi_{i,j}^{t+1}}{(\Delta x)^2} \\ & + \kappa (1 - \Theta) \frac{\varphi_{i-1,j}^t + \varphi_{i+1,j}^t + \varphi_{i,j-1}^t + \varphi_{i,j+1}^t - 4\varphi_{i,j}^t}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

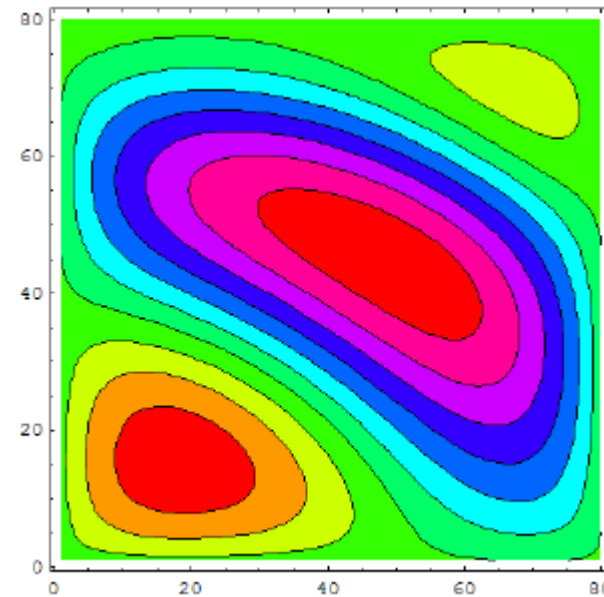
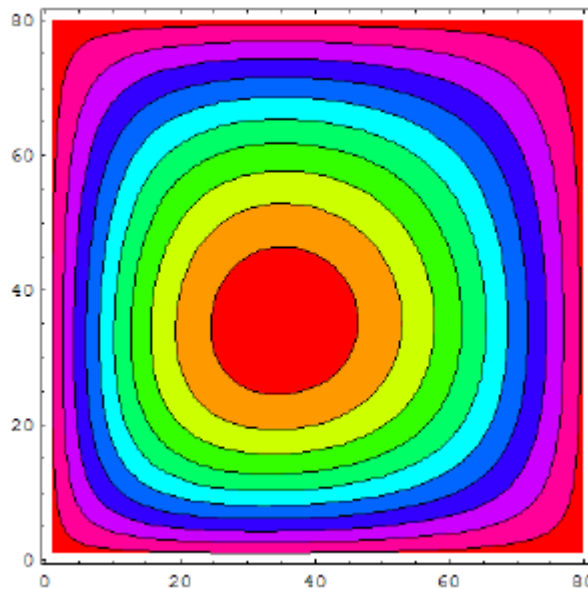
Równanie przewodnictwa

(kontynuacja)

$$(1 + 4\lambda\Theta)\varphi_{i,j}^{t+1} - \lambda\Theta(\varphi_{i-1,j}^{t+1} + \varphi_{i+1,j}^{t+1} + \varphi_{i,j-1}^{t+1} + \varphi_{i,j+1}^{t+1}) = R$$

$$R = (1 - 4\lambda(1 - \Theta))\varphi_{i,j}^t + \lambda(1 - \Theta)(\varphi_{i-1,j}^t + \varphi_{i+1,j}^t + \varphi_{i,j-1}^t + \varphi_{i,j+1}^t)$$

$$\lambda = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}$$



<http://www.wolfram.com/>

Metoda elementów skończonych

Zagadnienie brzegowe

Cząstkowe równanie różn.

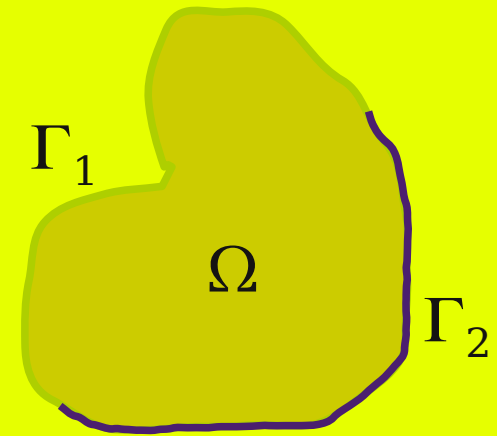
+ warunki brzegowe

L to operator Laplace'a Δ
Lub operator Helmholtza $\Delta - \Gamma^2$

$$L(\varphi(\mathbf{x})) = f, \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = u, \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = q, \mathbf{x} \in \Gamma_2$$



Idea MES:

- Poszukuj pewnej aproksymacji rozwiązania,
- posłuż się słabym sformułowaniem problemu,
- użyj uniwersalnej, skończonej dyskretyzacji...
- ...przekształcić zagadnienie brzegowe w układ równań algebr.

MES: rozwiązanie to aproksymacja

Poszukujemy przybliżonego rozwiązania w postaci szeregu:

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^M N_i(\mathbf{x}) \varphi_i$$

gdzie N_i to znane funkcje (np. wielomiany), a φ_i to nieznane współczynniki.

Celem jest znalezienie wartości współczynników $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$

Funkcje N_i nazywamy funkcjami bazowymi i dobieramy je tak, aby zapewnić stabilność algorytmu.

Najczęściej spotykane funkcje bazowe to wielomiany.

Metoda residuów ważonych

Poszukujemy M nieznanymi współczynników $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$

Wstawiając przybliżone rozwiązanie do oryginalnego równania otrzymamy niezerowe resisuum R :

$$L(\hat{\varphi}(x)) - f = R \neq 0$$

Wybierając M tak zwanych funkcji wagowych $w_1 \dots w_M$ takich, że

$$\int_{\Omega} w_i w_j = 0, \quad i \neq j$$

otrzymamy M różnych równań:

$$\int_{\Omega} R w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Metoda Galerkina

W tej metodzie używamy funkcji wagowych identycznych, jak f. bazowe:

$$w_i = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$\int_{\Omega} R w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$\int_{\Omega} \left(L \left(\sum_{j=1}^M N_j(x) \varphi_j \right) - f \right) N_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Należy pamiętać, że funkcje bazowe muszą być ortogonalne, aby układ równań miał jednoznaczne rozwiązanie

$$\int_{\Omega} N_i N_j = 0, \quad i \neq j$$

Zastosowanie 1 tw. Greena

W przypadku operatora Laplace'a:

$$L(\varphi) = \nabla^2 \varphi$$

zastosowanie metody Galerkina prowadzi do układu równań o postaci:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{\varphi} - f) N_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Twierdzenie Greena

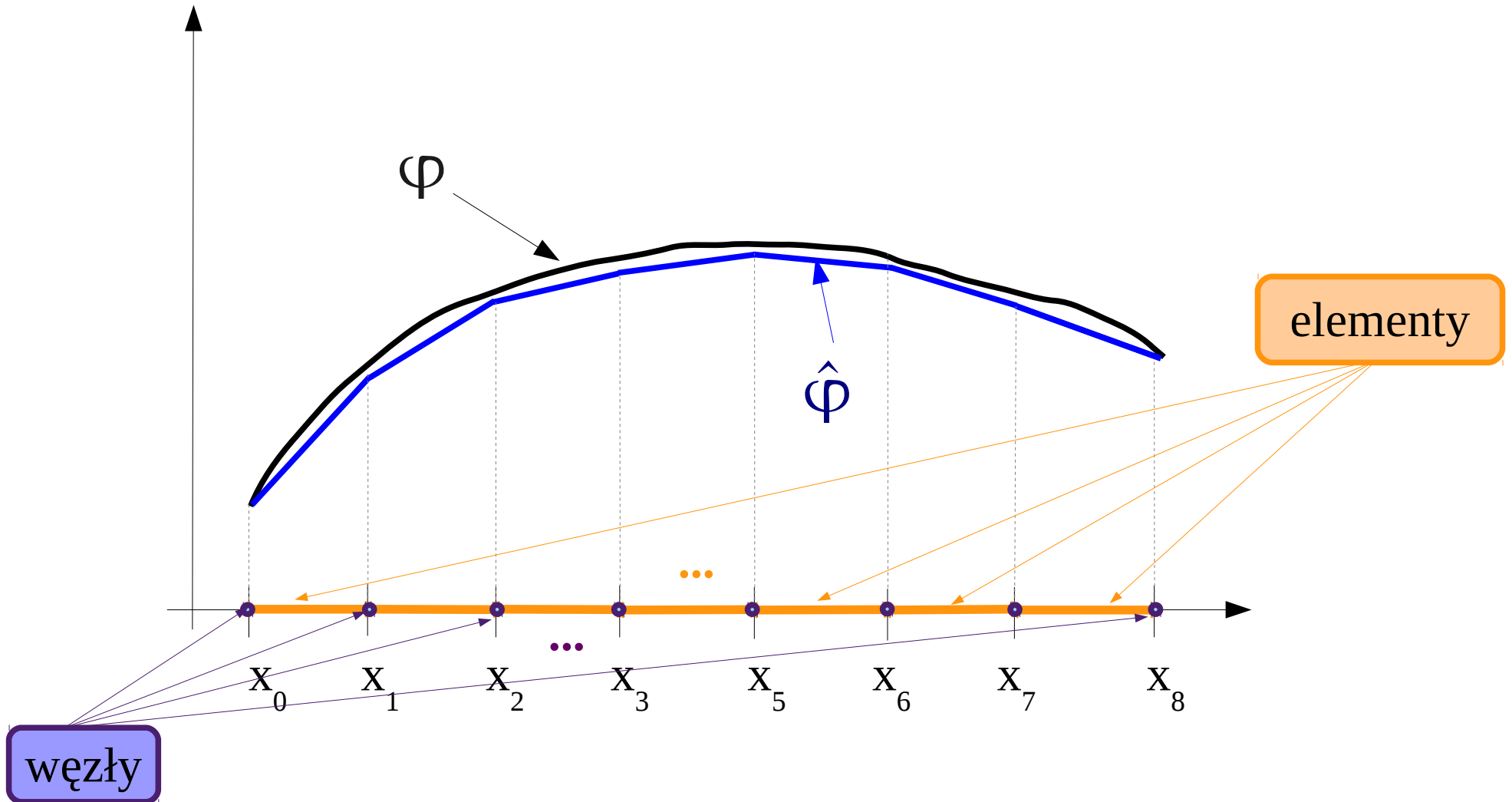
$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi) \cdot w = \oint_{\partial \Omega} w \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla w$$

Wykorzystując TG możemy przekształcić układ równań do postaci

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{\varphi} \cdot \nabla N_i = \oint_{\partial \Omega} w \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \int_{\Omega} N_i f$$

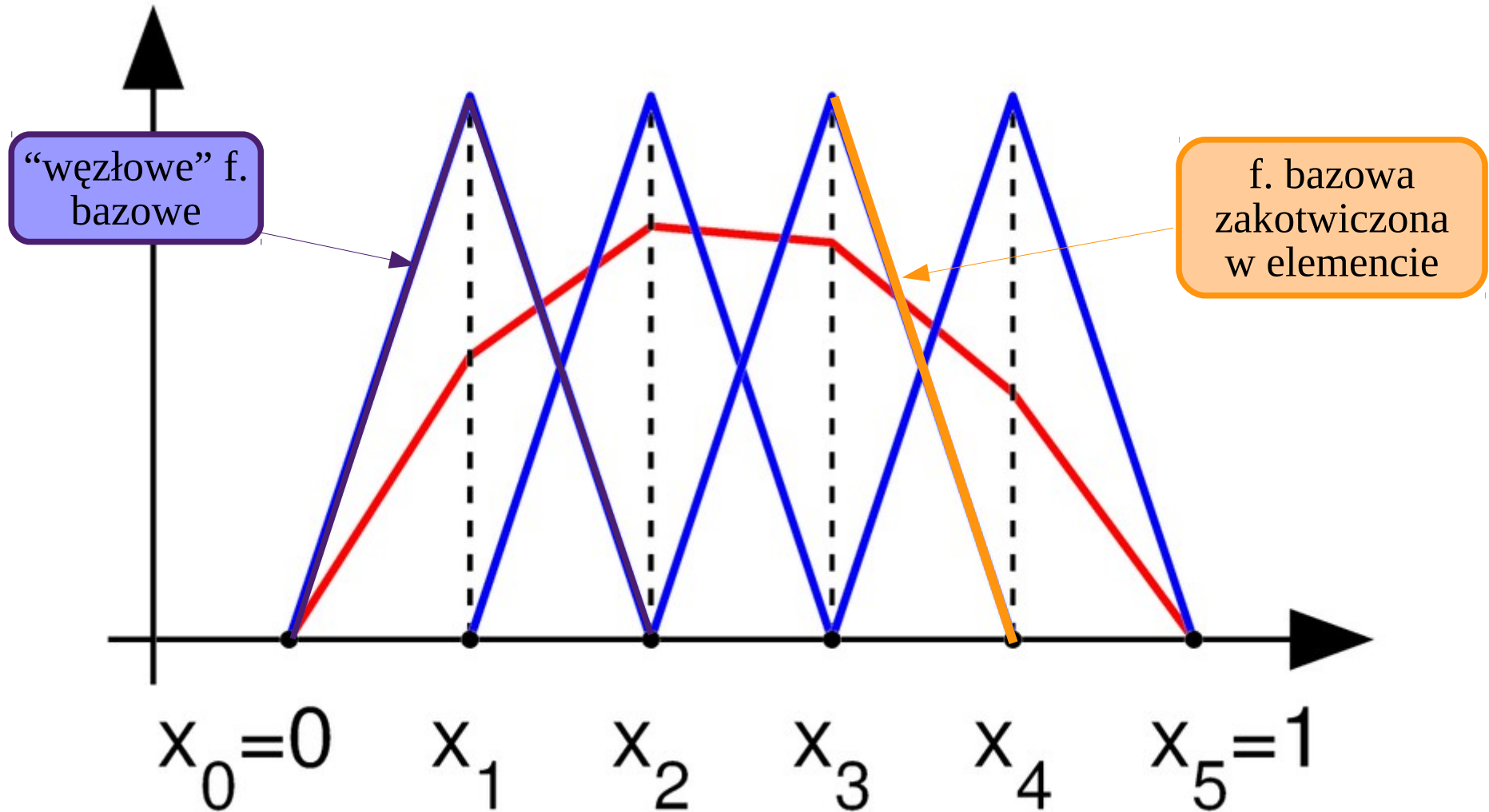
w której uwidaczniają się warunki brzegowe Neumana (a więc będzie można je uwzględnić).

Dyskretyzacja



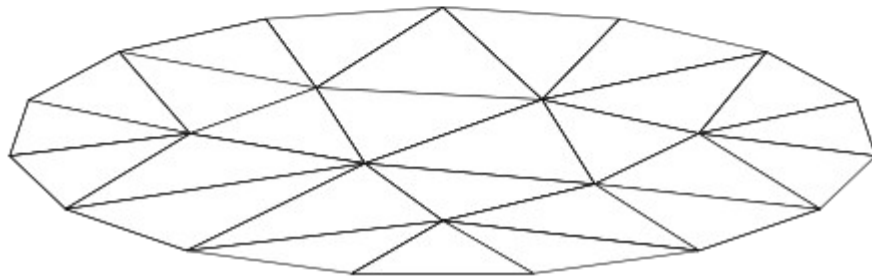
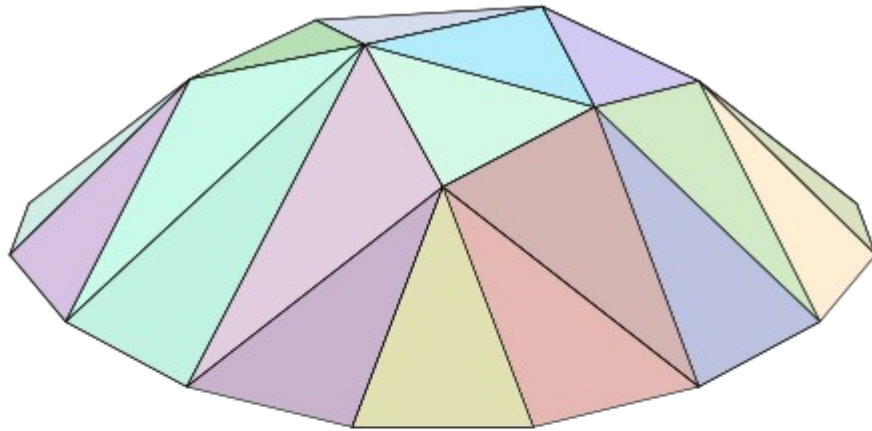
Dyskretyzacja

(kontynuacja)



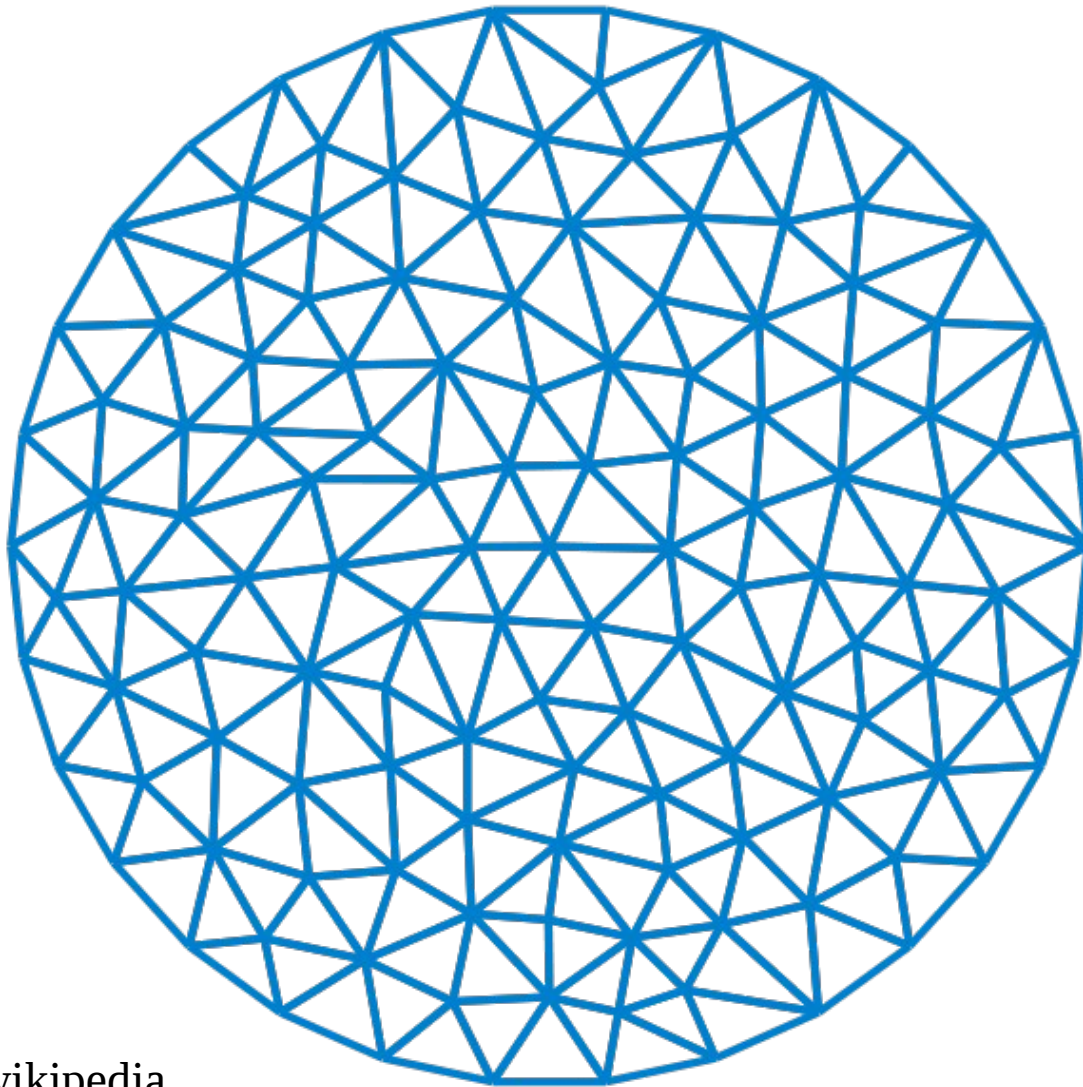
wikipedia

Przykład 2D



wikipedia

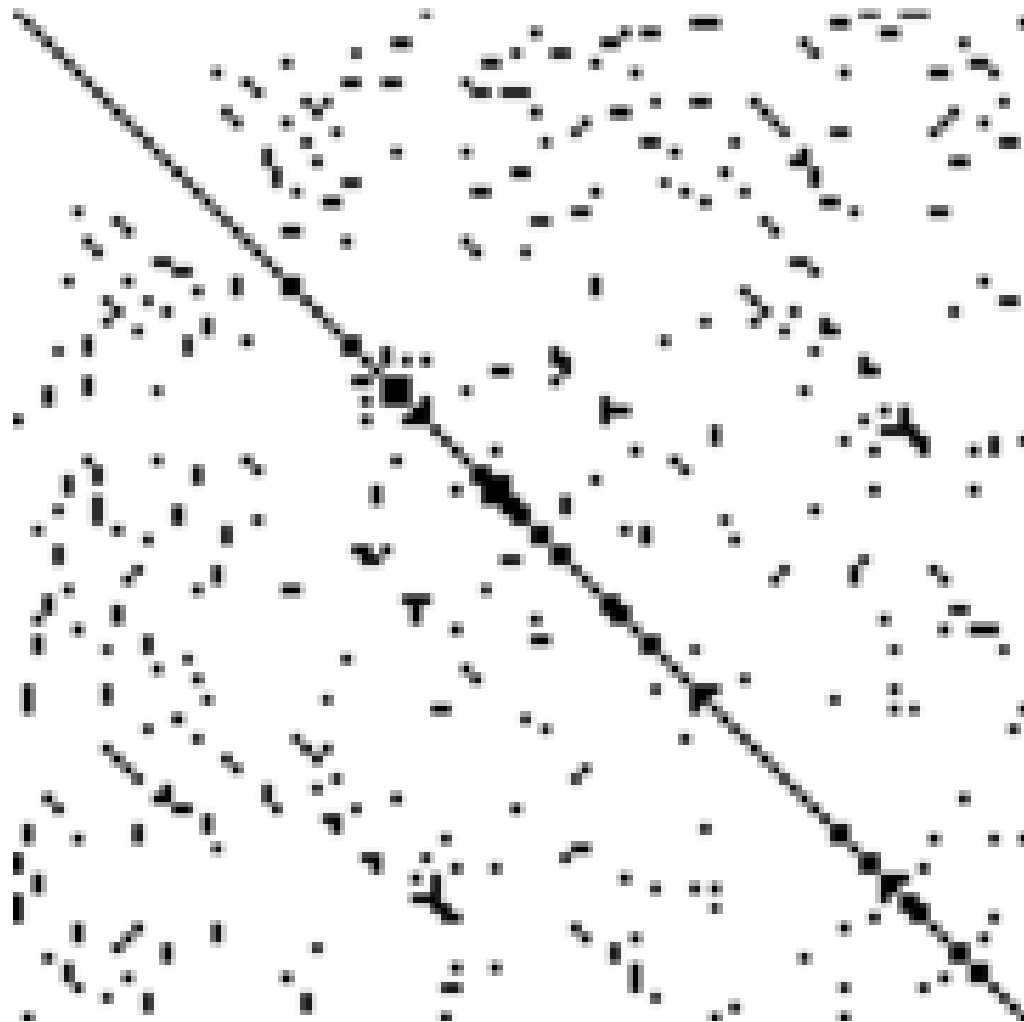
Przykład 2D



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4, \quad \Omega = x^2 + y^2 \leq 1$$
$$U = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

wikipedia

Przykład 2D

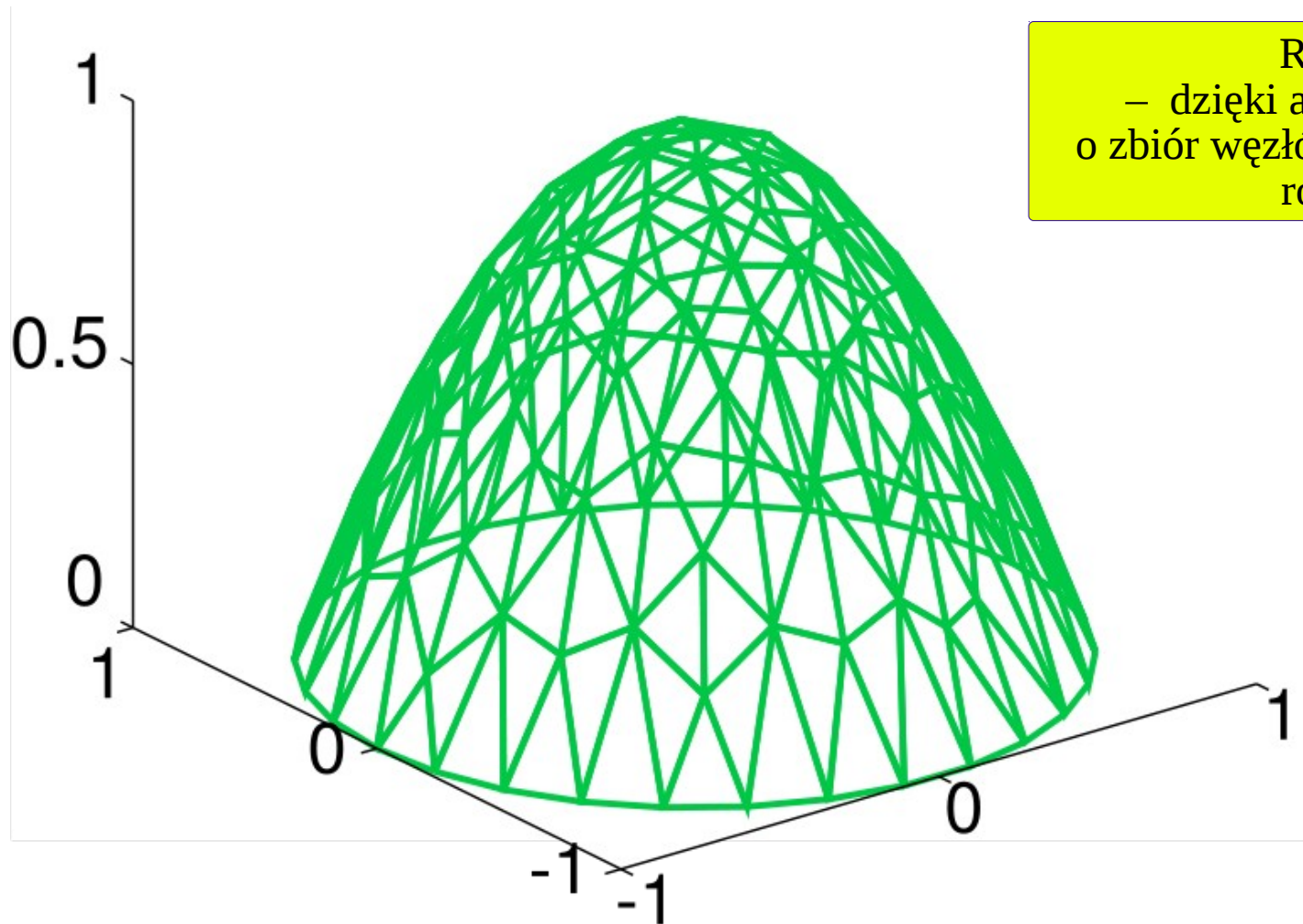


Układ równań algebraicznych
jest **rzadki**
zaledwie $\sim 0.5-1.5\%$ nie-zero

Często możemy także uzyskać układ,
który jest **symetryczny**.

wikipedia

Przykład 2D



Rozwiązanie
– dzięki aproksymacji opartej
o zbiór węzłów otrzymujemy ciągłe
rozwiązanie.

wikipedia