Podstawy elektromagnetyzmu

Wykład 2

Równania Maxwella

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prawa Maxwella opisują pola

Pole elektryczne...

to zjawisko występujące w otoczeniu naładowanych elektrycznie obiektów lub jest skutkiem zmiennego w czasie pola magnetycznego. Pole elektryczne powoduje powstawanie siły działającej na naładowane obiekty.

Pole magnetyczne...

Ito zjawisko występujące w otoczeniu poruszających się naładowanych obiektów lub na powstające w wyniku zmian pola elektrycznego w czasie. Pole magnetyczne powoduje powstawanie siły działającej na poruszające się naładowane obiekty.

Koncepcje pól E I M zaproponował Michael Faraday.

Siła Lorenza:

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Ładunek elektryczny?

Ładunek elektryczny...
to fizyczna własność materii. Jest wielkością nieciągłą (skwantowaną) – elementarny ładunek oznaczamy jako *e*
(uważa się, że kwarki mają ładunki będące wielokrotnościami *e/3*).

$$e \approx 1.602 e^{-19} [C]$$

Ładunki mogą być “dodatnie” lub “ujemne”. Elektron ma ładunek -*e*, proton +*e*. Ładunki się przyciągają (jeśli mają różne znaki) lub odpychają (jeśli mają ten sam znak):

$$\boldsymbol{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \approx 1^{-9}/(36\pi) \approx 8.85\mathrm{e}^{-12} [F/m]$$

Zasada zachowania ładunku:

Całkowity ładunek elektryczny odizolowanego systemu nie zmienia się.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prawo Lorentza

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E} + q\left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- **PL** dokreśla całkowitą siłę działającą na ładunek w obecności obu pól: elektrycznego $\boldsymbol{E}$ I magnetycznego $\boldsymbol{B}$.
- Pole elektryczne to zjawisko fizyczne.
- Pole magnetyczne $\boldsymbol{B}$ może być uważane za czysto matematyczną koncepcję umożliwiającą łatwe uwzględnienie efektów relatywistycznych (STW). Można pokazać, że "siłę magnetyczną" można wyznaczyć jedynie przy pomocy elektrostatyki I STW.
- Jednak powszechnie posługujemy się koncepcją pola magnetycznego $\boldsymbol{B}$, ponieważ upraszcza to rozważania i obliczenia.

Równania Maxwella (RM)

- Prawo Ampera (skorygowane przez Maxwella)

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Prawo indukcji Faraday'a

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{-\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

- Prawo Gaussa

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$\boldsymbol{E}$ – pole elektryczne (natężenie PE)
$\boldsymbol{D}$ – indukcja elektryczna
$\boldsymbol{H}$ – natężenie pola magnetycznego
$\boldsymbol{B}$ – pole magnetyczne (indukcja magnetyczna)
$\boldsymbol{J}$ – gęstość prądu elektrycznego (wektor GPE)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prawo Ampera

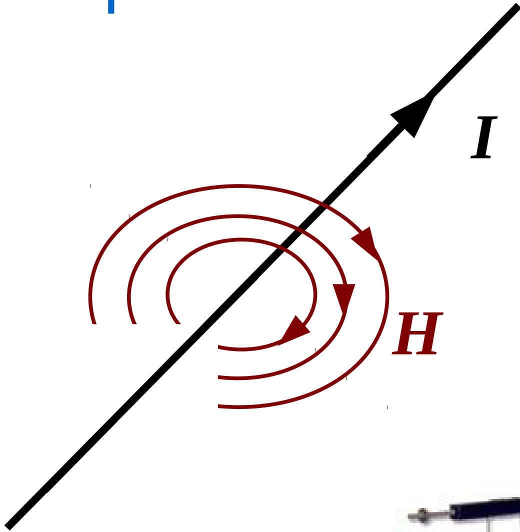
- Odkryte przez Andre-Marie Ampere w 1826 r.
  - Postać różniczkowa

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

  - Postać całkowa

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = I$$



Całka z natężenia pola magnetycznego wzdłuż zamkniętej krzywej jest równa całkowitemu prądowi przepływającemu przez powierzchnię, której brzegiem jest krzywa.

http://www.sparkmuseum.com

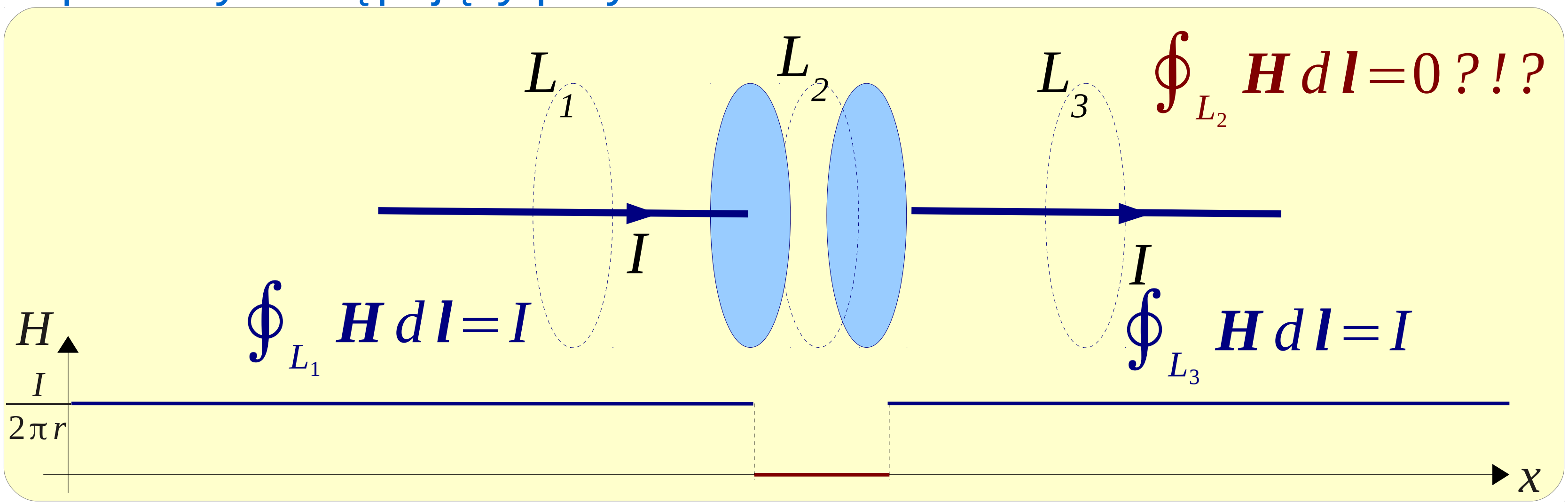
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prawo Maxwella-Ampera

Prawo ampera sugeruje, że w próżni, gdzie $\boldsymbol{J}=0$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0 \qquad \oint_{\partial S}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}=0$$

Rozpatrzmy następujący przykład:



J.C Maxwell zasugerował skorygowanie prawa Ampera

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{S}$$

(On Physical Lines of Force, 1861)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

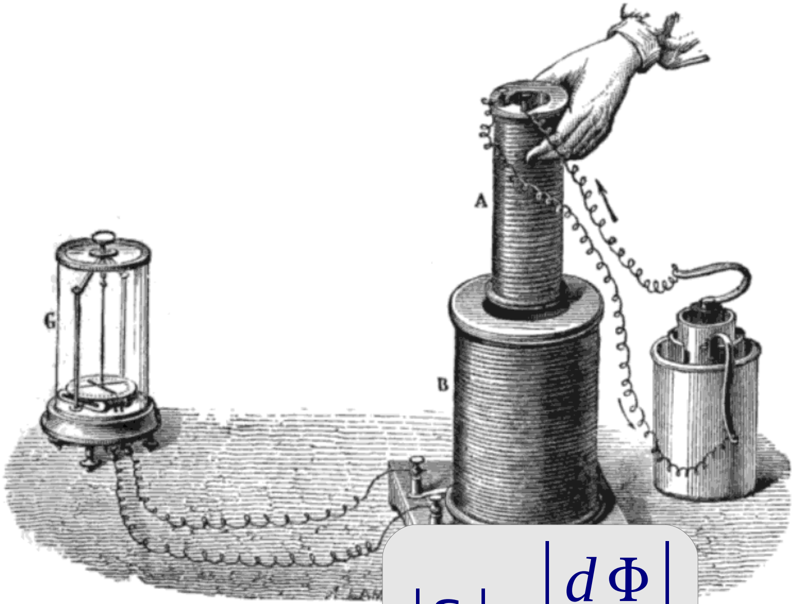
Prawo indukcji Faraday'a

- Odkryte niezależnie przez Michaela Faraday'a i Josepha Henry'ego in 1831 r. (M. Faraday jako pierwszy opublikował pracę)
  - Postać różniczkowa

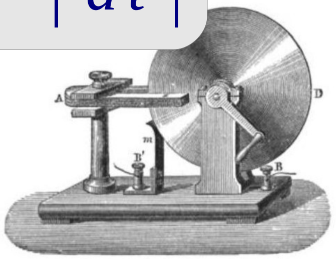
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

  - Postać całkowa

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}\right)$$



$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$



Siła elektromotoryczna indukująca się w zamkniętej pętli jest wprost proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego obejmowanego przez pętlę.

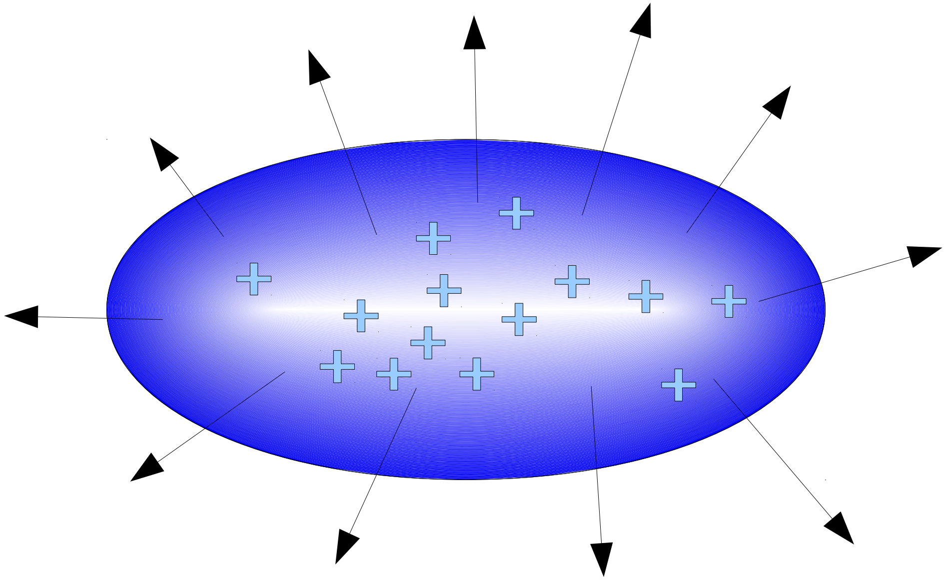
Prawo Gaussa

- Odkryte przez Carla Friedricha Gaussa w 1835 r (opublikowane w 1867 r.)
  - Postać różniczkowa

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

  - Postać całkowa

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = Q$$



Źródłem pola elektrycznego jest ładunek.

Strumień wektora indukcji magnetycznej przez zamkniętą powierzchnię jest równy całkowitemu ładunkowi obejmowanemu przez tę powierzchnię.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

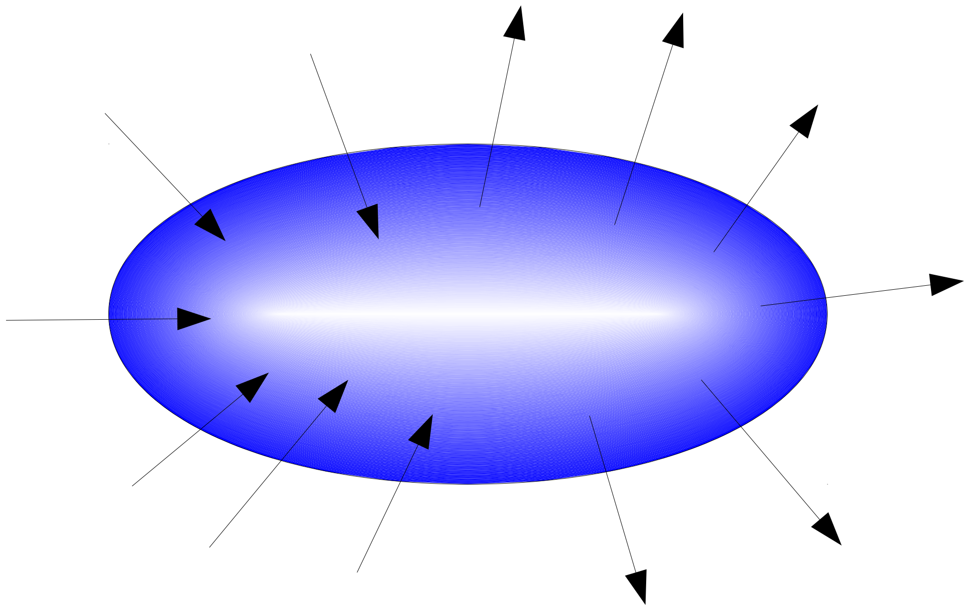
Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

- Analogia prawa Gaussa dla pola magnetycznego
  - Postać różniczkowa

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

  - Postać całkowa

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0$$



Nie istnieją ładunki magnetyczne.
(To jest oczywiste, jeśli pamiętamy, że $\boldsymbol{B}$ to zabieg matematyczny.)

Całkowity strumień wektora indukcji magnetycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy zero.

RM i materia – związki konstytutywne

W próżni

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{J}=0 \quad \boldsymbol{E}=0$$

Jednorodne, anizotropowe, niedyspersywne matariały

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E}$$

W rzeczywistości

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon(\boldsymbol{E},f)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu(\boldsymbol{H},f)\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{J}=\sigma(T(\boldsymbol{J}))\boldsymbol{E}$$

Co więcej, ε,μ i σ są w ogólności tensorami, których elementy Zależą od natężenia pola, jego kierunku i innych czynników, Takich jak temperatura, naprężenia mechaniczne, historia, ...

Na szczęście w ramach tego kursu będziemy świat idealizować ☺

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Historia (1)

J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,* 1864

J.C.Maxwell podał 6 skalarnych równań we Współrzędnych kartezjańskich, co doprowadziło go do 20 równań z 20 niewiadomymi. Obok zapisano odpowiednie równania we współczesnej notacji wykorzystującej wektory.

(1) Całkowity prąd $\boldsymbol{J}_{tot}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

(2) Siła magnetyczna $\mu \boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

(3) Prawo Ampere'a $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{tot}$

(4) Siła elektromotoryczna $\boldsymbol{E}=\mu\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$

(5) Elektryczne równanie elastyczności $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}$

(6) Prawo Ohma $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}$

(7) Prawo Gaussa $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

(8) Zasada zachowania ładunku $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ lub $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{tot}=0$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Historia (2)

J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism,* 1873

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

Potencjały

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\downarrow$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

Zastosowanie praktyczne

- RM umożliwiają określenie (przewidzenie) zasad obowiązujących w PEM
- Praktyczne problemy wymagają ograniczenia czasu i przestrzeni
- Warunki brzegowe pozwalają zawęzić przestrzeń analizy
- Warunki początkowe pozwalają zawęzić przedział czasowy

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Warunki? Po co?

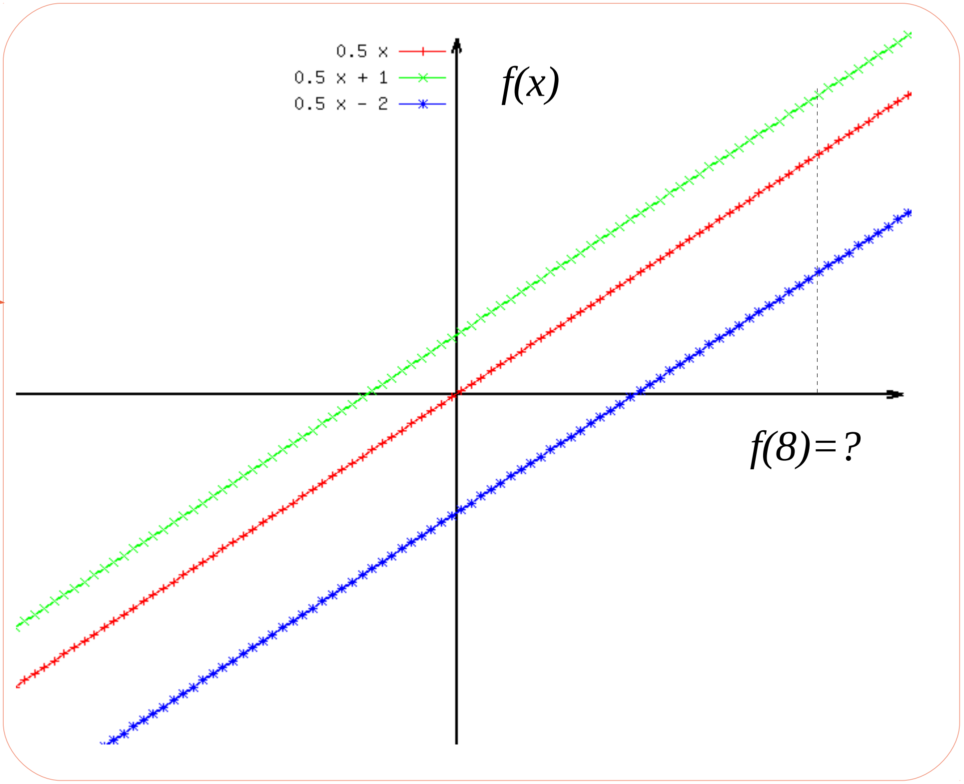
RM to cząstkowe równania różniczkowe – określają pochodne opisujące po.

Rozważmy dla przykładu zwyczajne RR:

$$\frac{d f(x)}{d x} = 0.5$$

$$f(x) = 0.5x + c$$

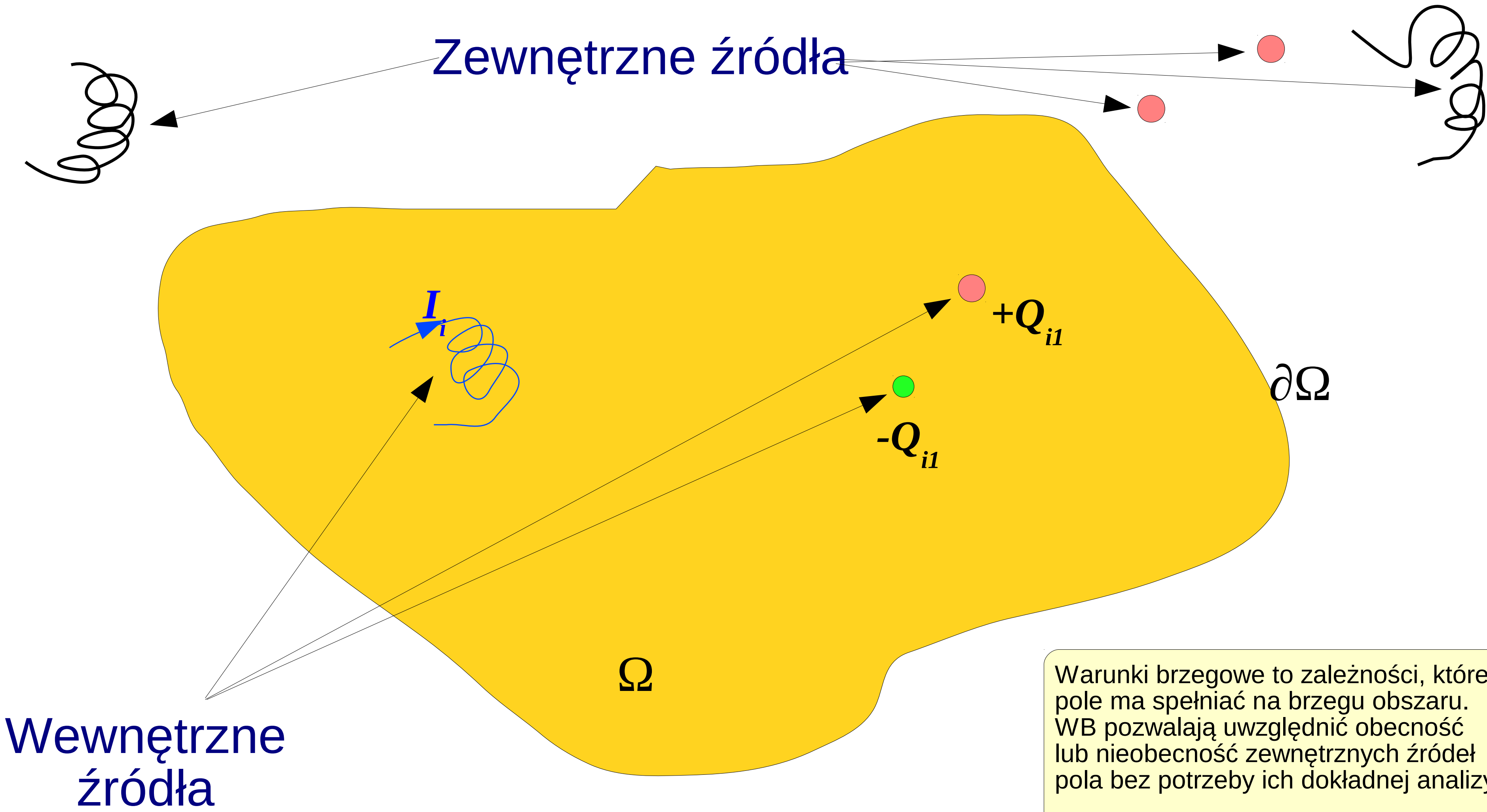
c=?



Jak widać, ogólne rozwiązanie RR pozwala przewidzieć rodzaj funkcji ale nie konkretną funkcję. Potrzebujemy dodatkowych ograniczeń, aby wybrać rozwiązanie konkretne.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Warunki brzegowe

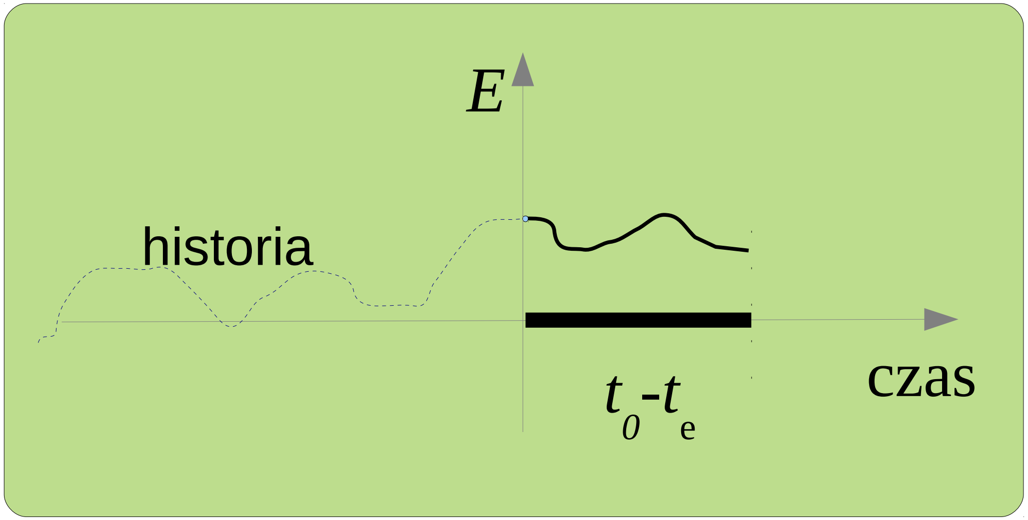


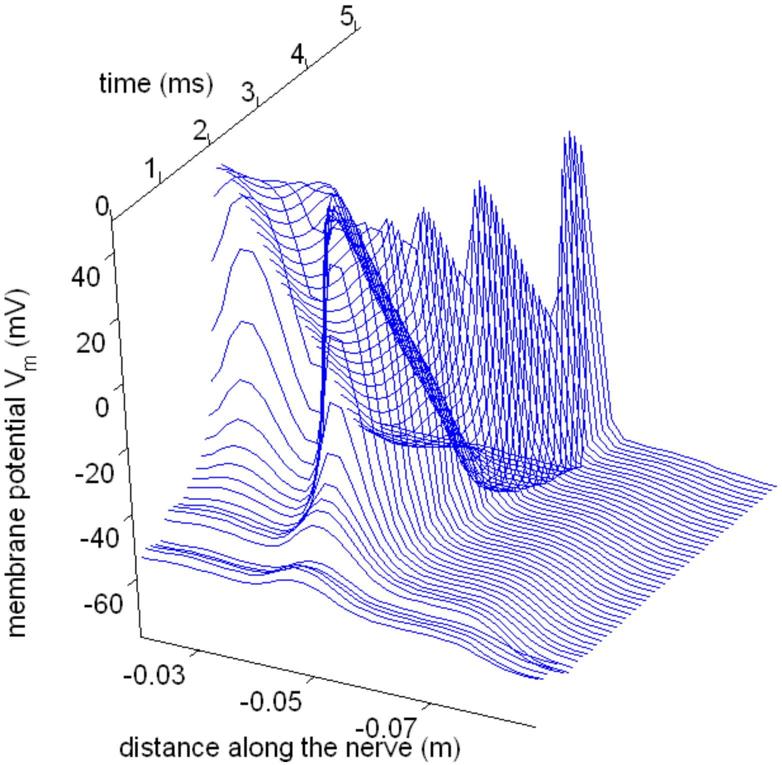
Warunki brzegowe to zależności, które pole ma spełniać na brzegu obszaru. WB pozwalają uwzględnić obecność lub nieobecność zewnętrznych źródeł pola bez potrzeby ich dokładnej analizy.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Warunki początkowe

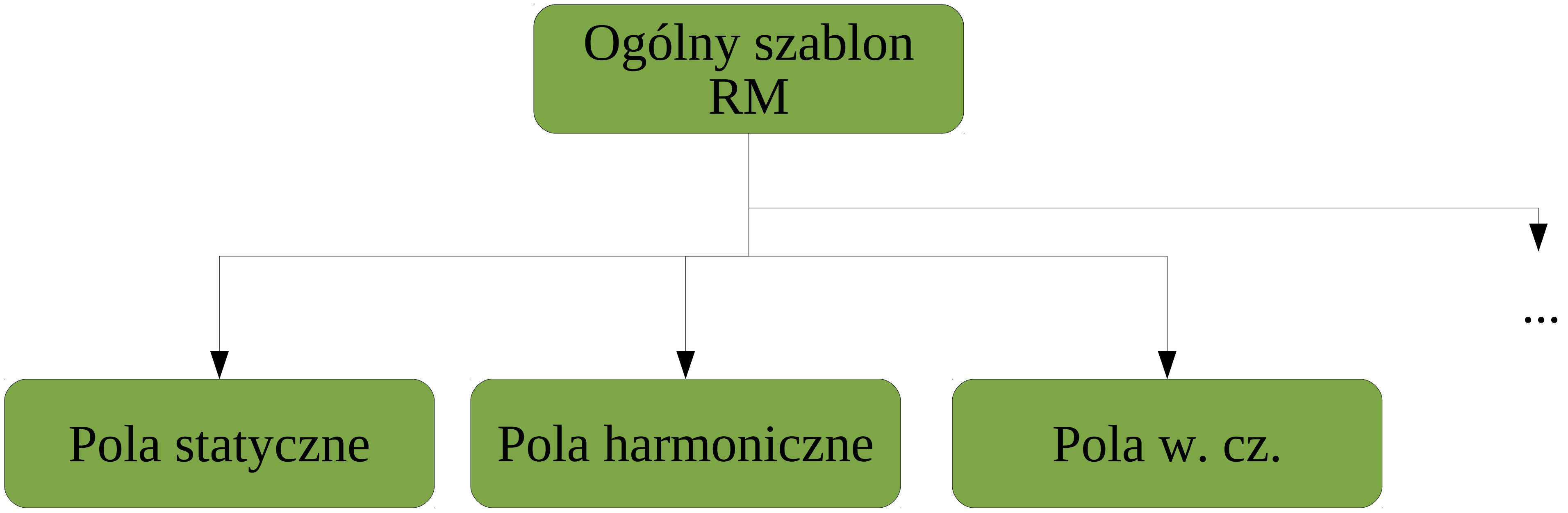
Warunki początkowe to zależności, które pole musi spełniać w pewnym momencie (t=0). Pozwalają uwzględnić historię zmian pola.





Uproszczenia

RM są bardzo ogólne i dość skomplikowane. Na szczęście w wielu zagadnieniach możemy je uprościć.
Robimy to przez pominięcie pewnych składników, które są małe,
Przez wykorzystanie symetrii lub specjalny opis matematyczny.,



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Uproszczenia: electrostatyka

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{-\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

Interesują nas zjawiska w stałych lub wolno zmieniających się polach.

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$$

Interesuje nas tylko pole elektryczne, stałe w czasie.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

Używamy opisu funkcją skalarną.

$$\boldsymbol{E} = \nabla \varphi$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Uproszczenia: magnetostatyka

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{-\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=0$$

Tylko pole magnetyczne, stałe w czasie.

Interesuje nas pole magnetyczne od stałych lub wolnozmiennych prądów.

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$