

# Podstawy elektromagnetyzmu

## *Wykład 3*

### *Elektrostatyka, cz. 1*

# Prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{1}_{q_1 q_2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = c^2 \frac{\mu_0}{4\pi} = c^2 \cdot 10^{-7}$$

$$k = 8.988 \times 10^{-9}$$

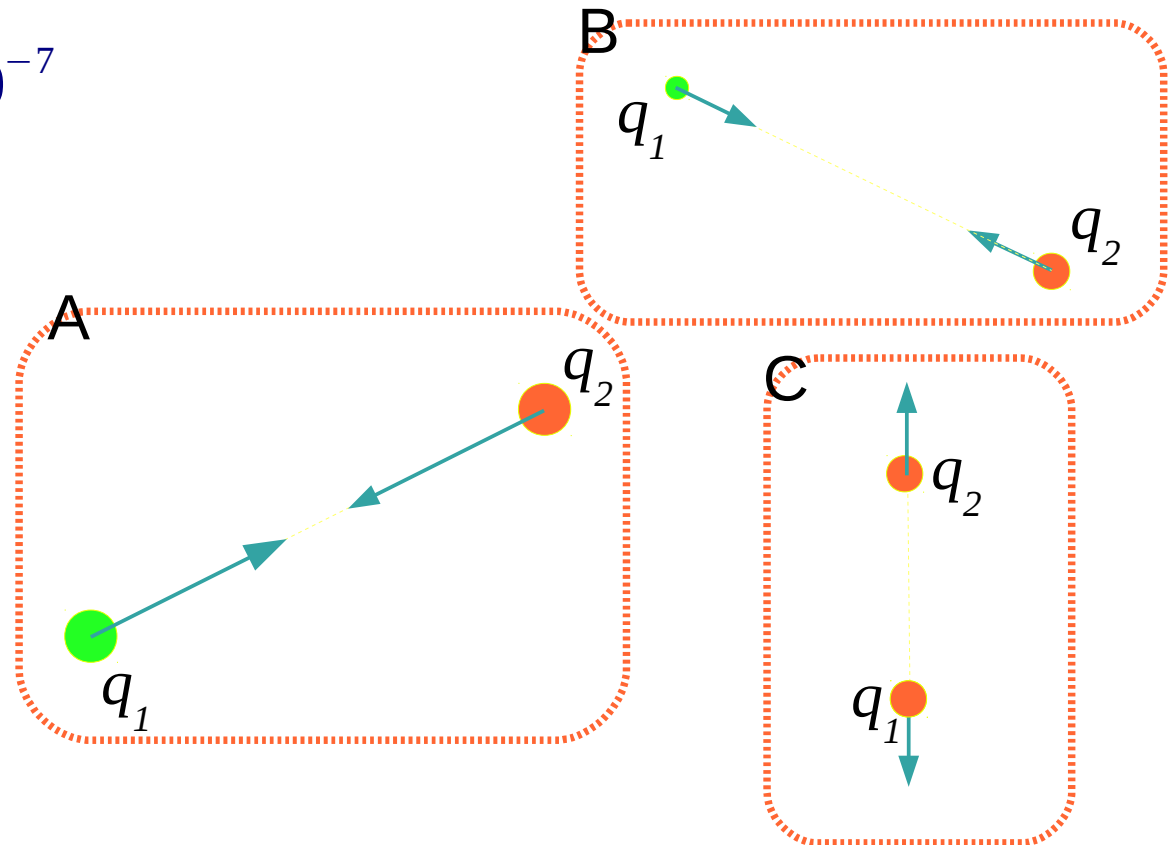
$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$$

## Notka historyczna:

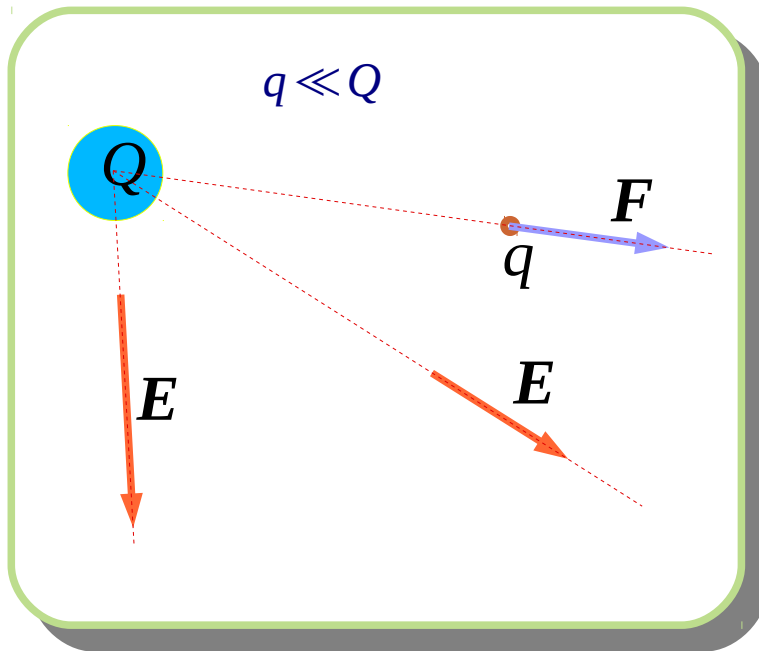
1767: John Priestley - sugestia

1771: Henry Cavendish - eksperyment

1785: Charles Augustin de Coulomb - publikacja



# Pole elektryczne od pojedynczego ładunku



$$F = k \frac{Q}{r^2} \mathbf{1}_{Qq} \cdot q = q \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

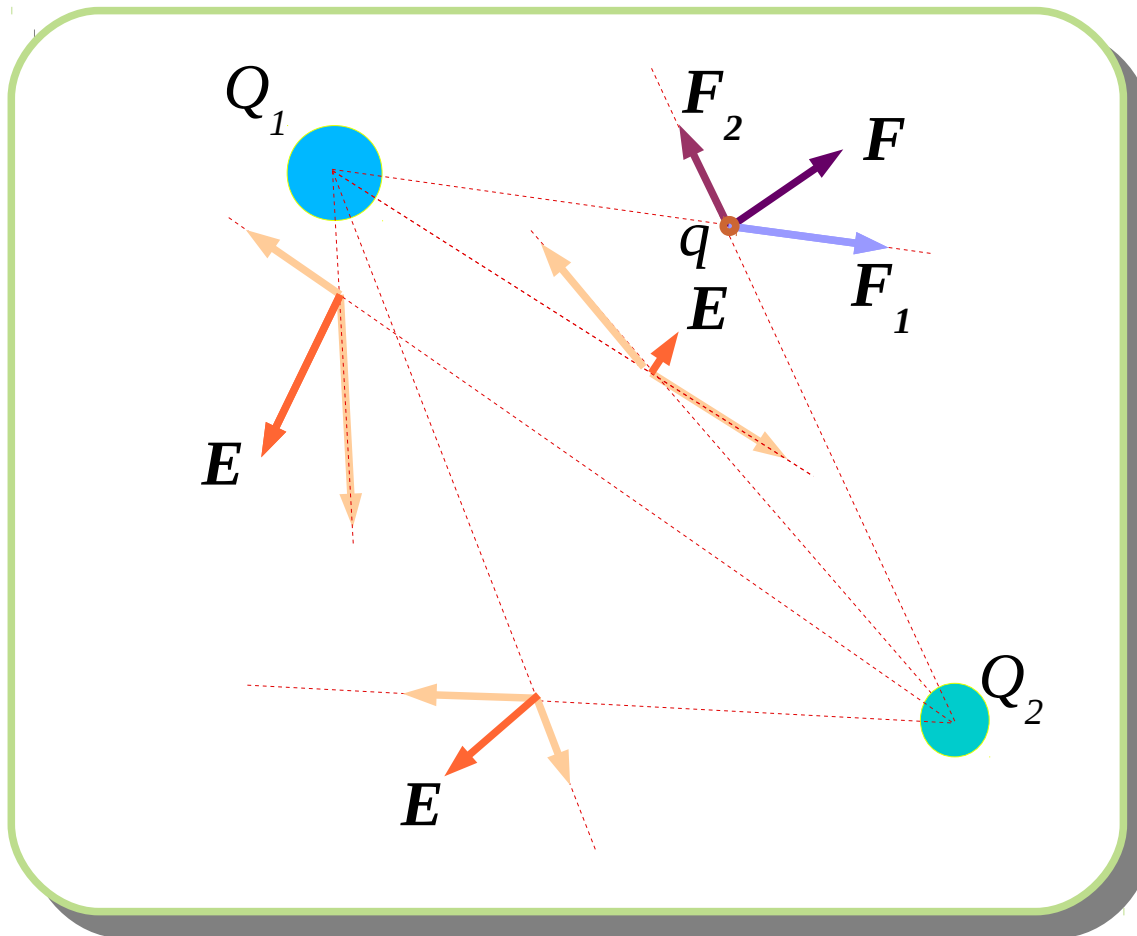
Definiujemy pole jako siłę działającą na jednostkowy ładunek.  
(Stacjonarny i punktowy)

E od pojedynczego (punktowego) ładunku  $Q$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{1}_r$$

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

# Pole elektryczne od wielu ładunków



$$F_1 = k \frac{Q_1}{r_i^2} \mathbf{1}_{Q_1 q} \cdot q = q E_1$$

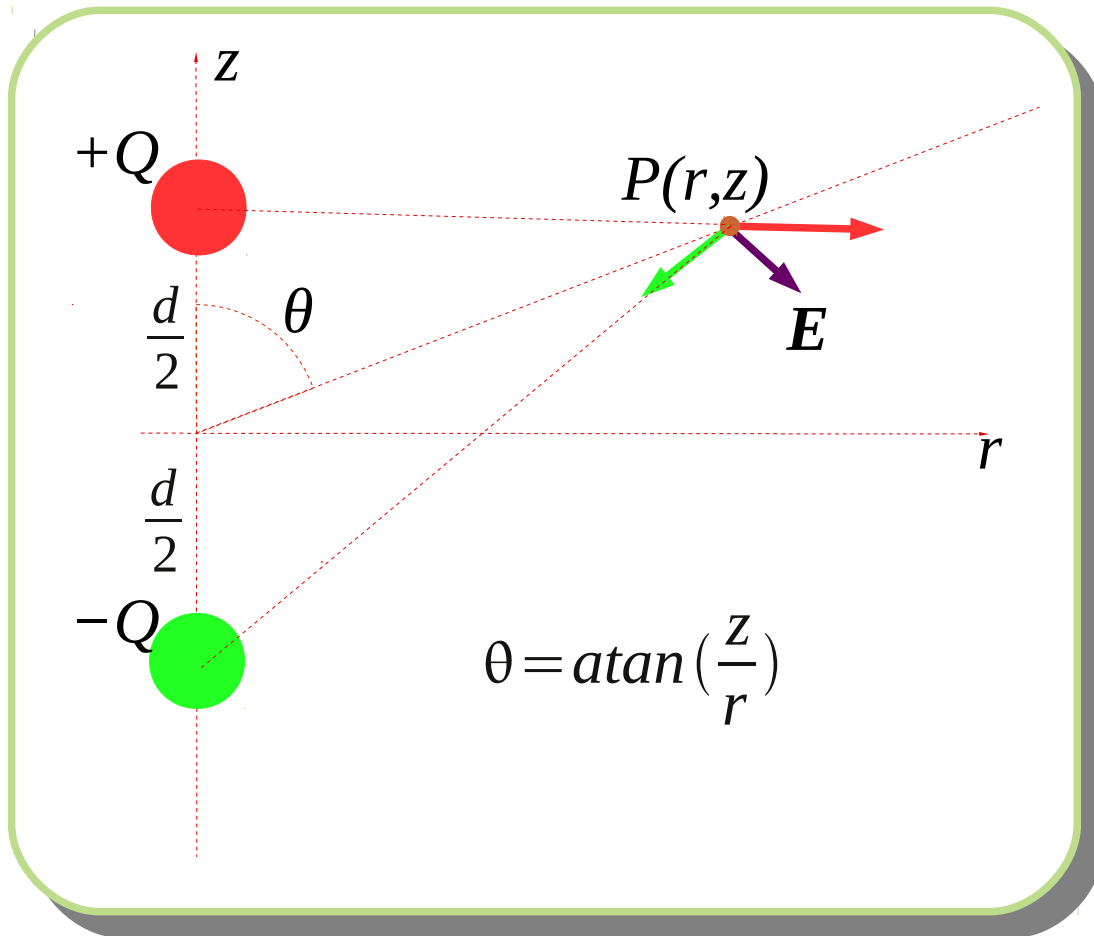
$$F_2 = k \frac{Q_2}{r_i^2} \mathbf{1}_{Q_2 q} \cdot q = q E_2$$

$$F = k \cdot q \cdot \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{1}_{Q_i q} = q E$$

$E$  generowane przez  $n$  punktowych ładunków  $Q_1 \dots Q_n$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{1}_{r_i}$$

# Dipol elektryczny



Moment dipola  $p = dQ$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

We współrzędnych walcowych

$$\mathbf{E}_+ = \frac{kQ}{r_+^2} \left[ \frac{r}{r_+}, \frac{z-d/2}{r_+} \right]$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\mathbf{E}_- = -\frac{kQ}{r_-^2} \left[ \frac{r}{r_-}, \frac{z+d/2}{r_-} \right]$$

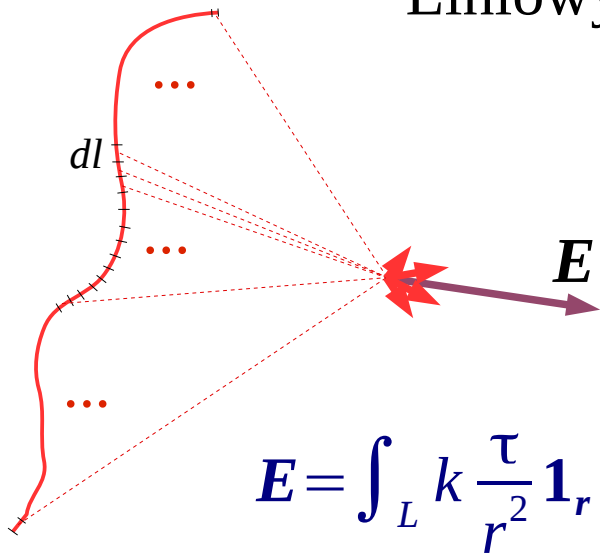
$$r_- = \sqrt{r^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}$$

Dalekie ( $r \gg d$ ) pole dipola we współrzędnych sferycznych:

$$\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} [2\cos(\theta), \sin(\theta)]$$

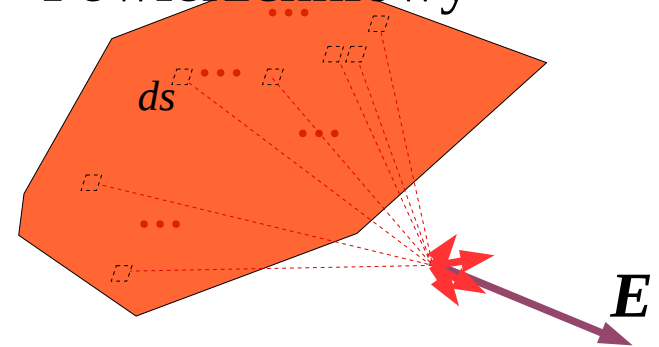
# “Ciągły” rozkład ładunku

Liniowy

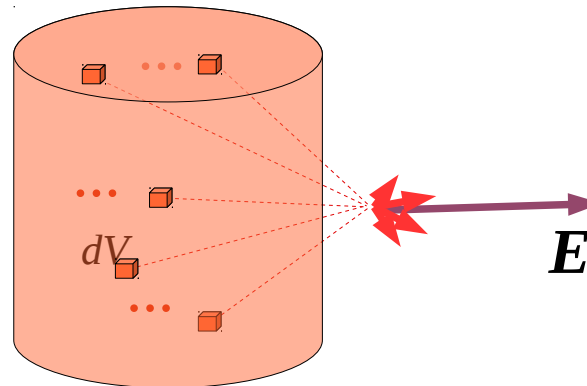


$$\mathbf{E} = \int_L k \frac{\tau}{r^2} \mathbf{1}_r dl$$

Powierzchniowy



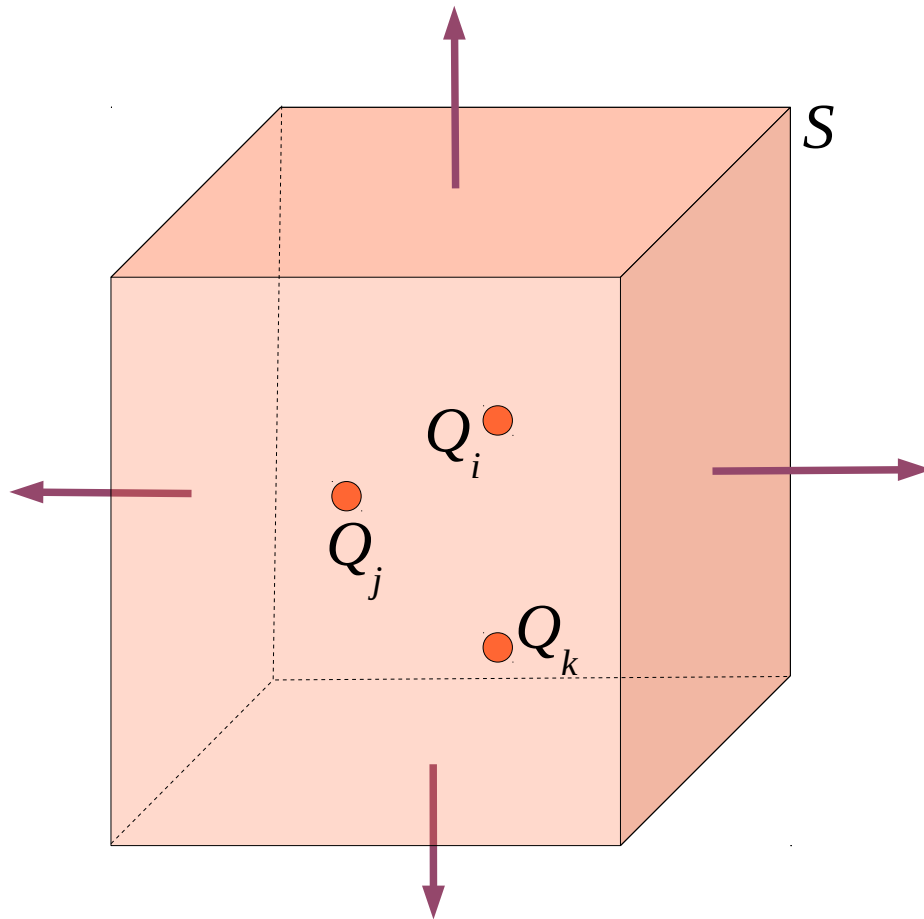
Objętościowy



$$\mathbf{E} = \iiint_V k \frac{\rho}{r^2} \mathbf{1}_r dV$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

# Prawo Gaussa



$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = \sum Q$$

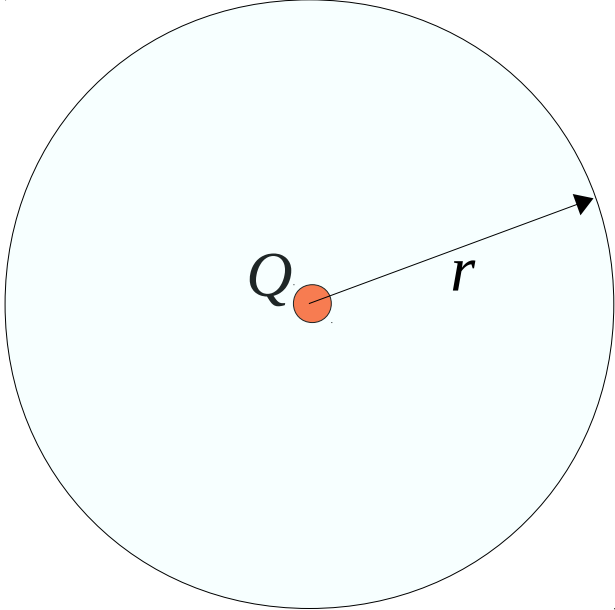
$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# Zastosowanie prawa Gaussa

Powierzchnia Gaussa – sfera o środku w ładunku



$Q$

$r$

Możemy wykorzystać prawo Gaussa do wyznaczenia Rozkładu pola o ile symetria rozkładu ładunków powoduje symetrię rozkładu pola taką, że całka może być sprowadzona do iloczynu stałej wartości  $D$  i pewnej liczby (powierzchni).

$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q$$

↓

$$4\pi r^2 \mathbf{D} = Q$$

{ Symetria:  $\mathbf{D}$  ma tylko jedną składową (prostopadłą do  $S$ ),  
Która jest stała na pow. sfery.

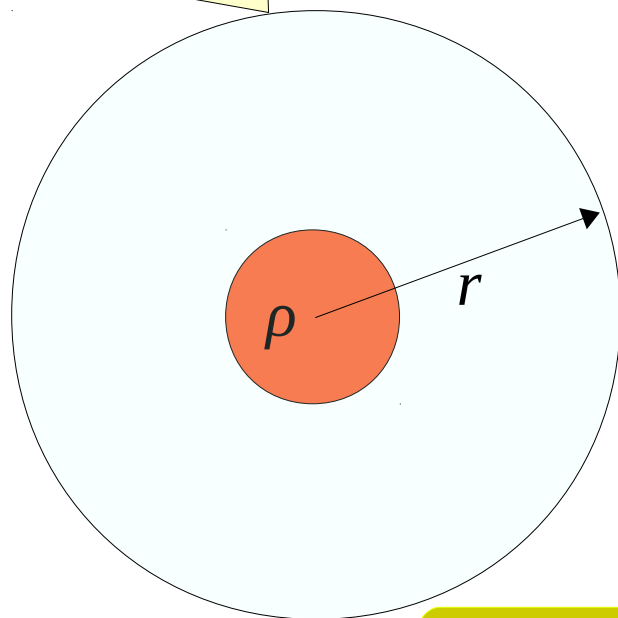
$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



# Przykład: pole naładowanej objętościowo kuli

Powierzchnia Gaussa – sfera o środku w środku kuli.



$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q$$

Symetria:  $\mathbf{D}$  ma tylko jedną składową (prostopadłą do sfery), stałą na pow. sfery.

$$4\pi r^2 \mathbf{D} = Q$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

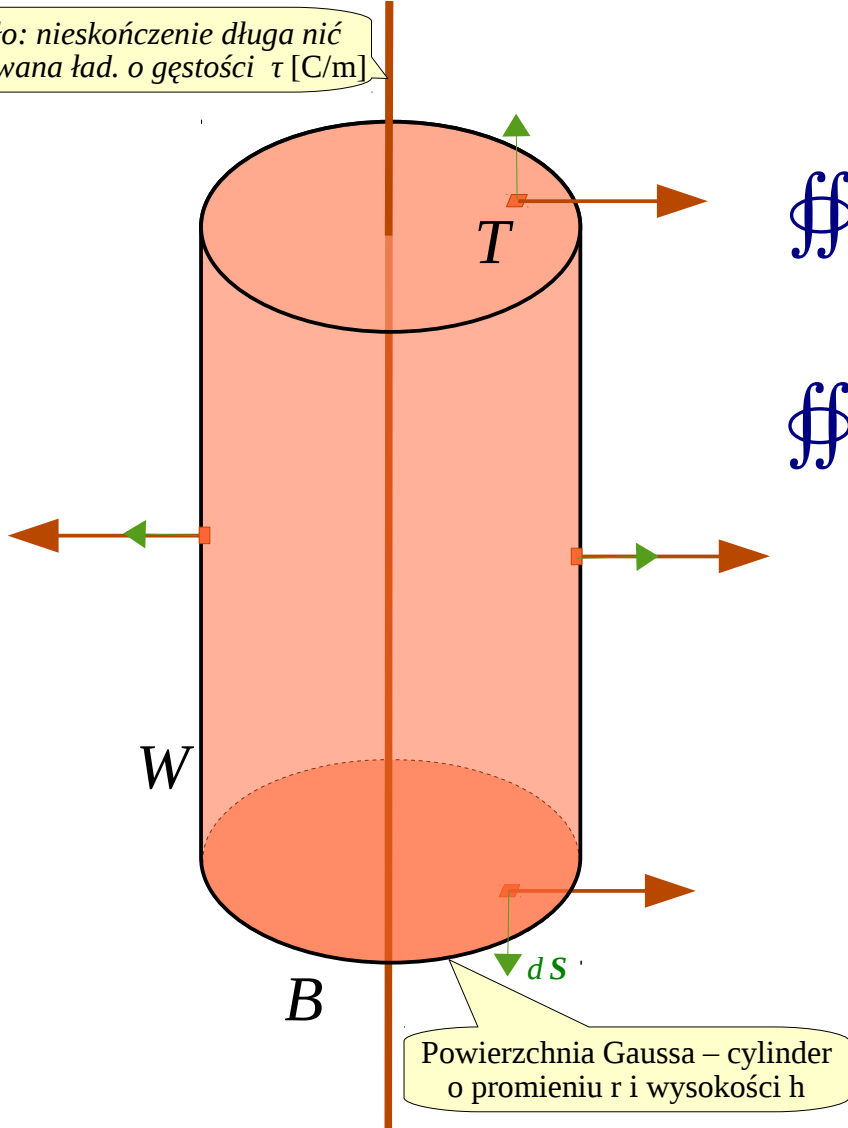
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Wniosek:

- zewnątrzny obserwator nie rozróżnia źródła pola
- to może być ładunek punktowy
- albo dowolny obiekt (kula, powierzchnia) o symetrycznie rozmieszczonym ładunku

# Przykład: pole naładowanej nici

Źródło: nieskończenie długa nić naładowana ład. o gęstości  $\tau$  [C/m]



Powierzchnia Gaussa – cylinder o promieniu  $r$  i wysokości  $h$

$$\oiint_S \mathbf{D} ds = Q = h \cdot \tau$$

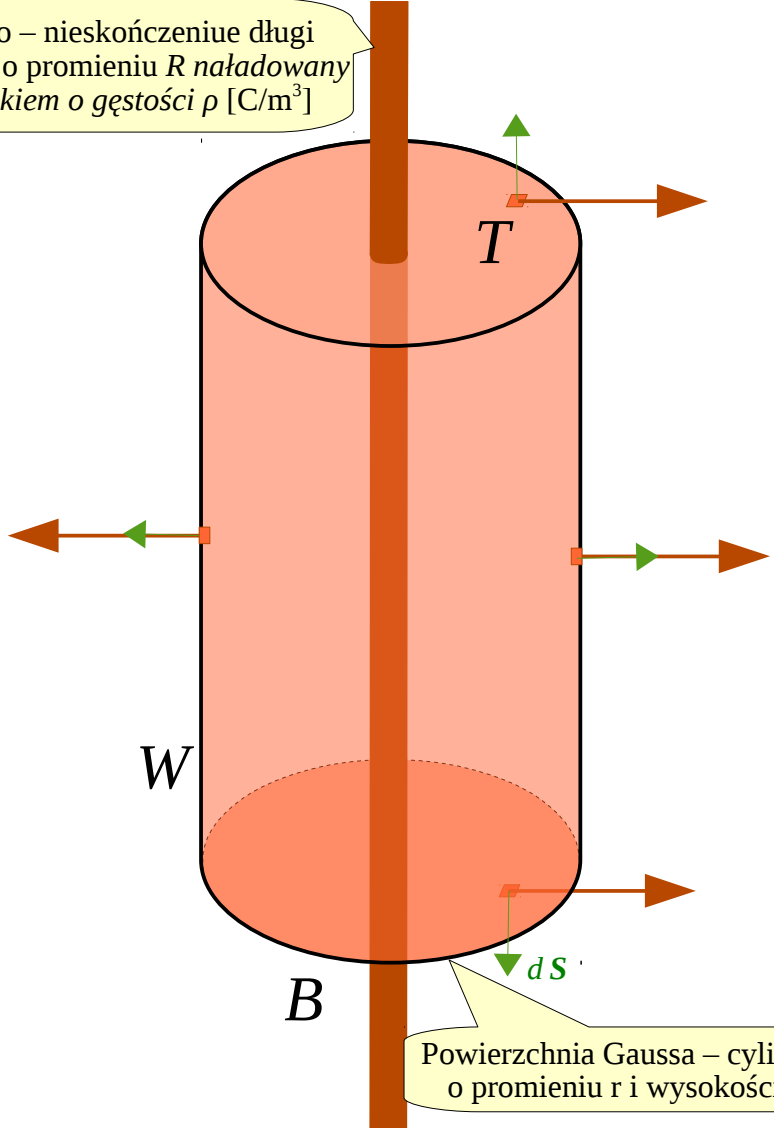
$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{D} ds &= \oint_W \mathbf{D} ds + \oint_T \mathbf{D} ds + \oint_B \mathbf{D} ds = \\ &= \oint_W \mathbf{D} ds + 0 + 0 = \\ &= 2\pi r h \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$h \cdot \tau = 2\pi r h D$$

$$\mathbf{D} = \frac{\tau}{2\pi r}$$

# Przykład : pole naładowanego cylindra

Źródło – nieskończenie długi cylinder o promieniu  $R$  naładowany ładunkiem o gęstości  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>]



Powierzchnia Gaussa – cylinder o promieniu  $r$  i wysokości  $h$

$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q = \pi R^2 h \cdot \rho$$

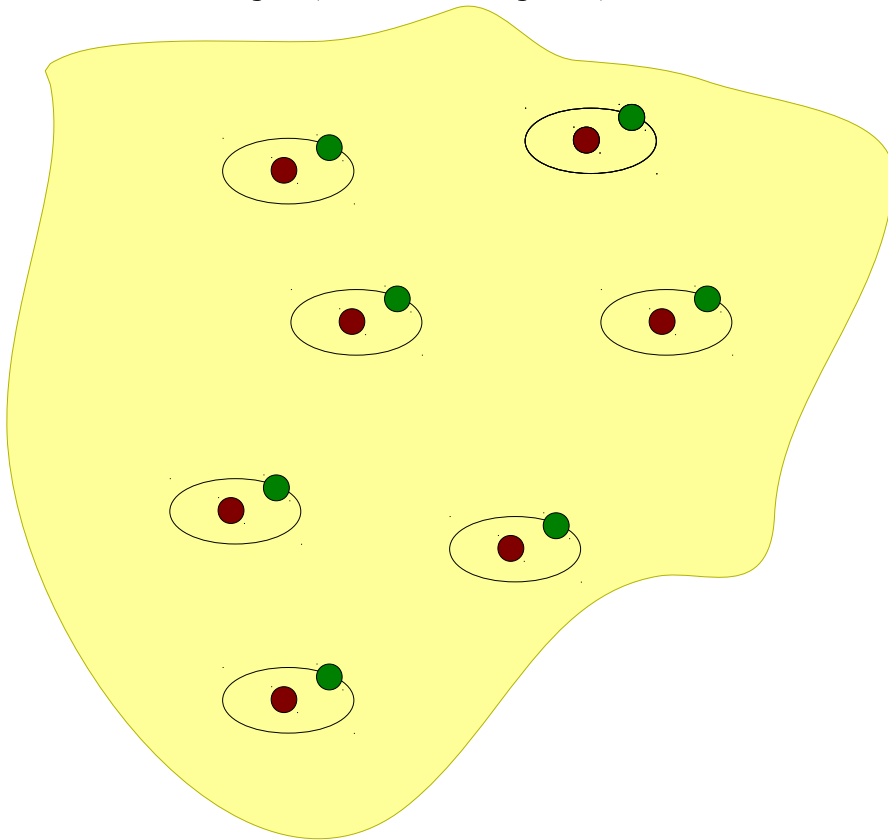
$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} &= \oint_W \mathbf{D} d\mathbf{s} + \oint_T \mathbf{D} d\mathbf{s} + \oint_B \mathbf{D} d\mathbf{s} = \\ &= \oint_W \mathbf{D} d\mathbf{s} + 0 + 0 = \\ &= 2\pi r h \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\pi R^2 h \cdot \rho = 2\pi r h \mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{R^2 \rho}{2r} = \frac{\tau'}{2\pi r} \quad \tau' = \pi R^2 \rho$$

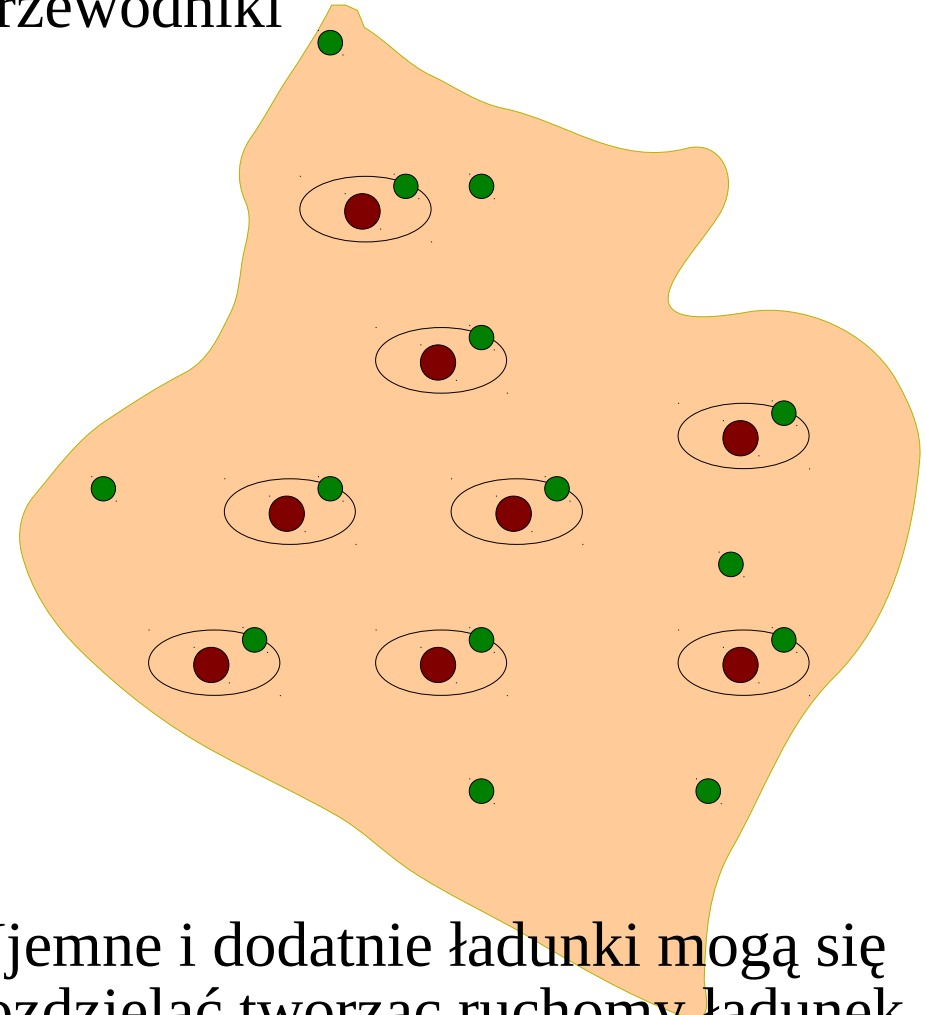
# Elektryczność i materia

## Izolatory (dielektryki)



Ujemne i dodatnie ładunki są związane w cząsteczki (lub atomy)

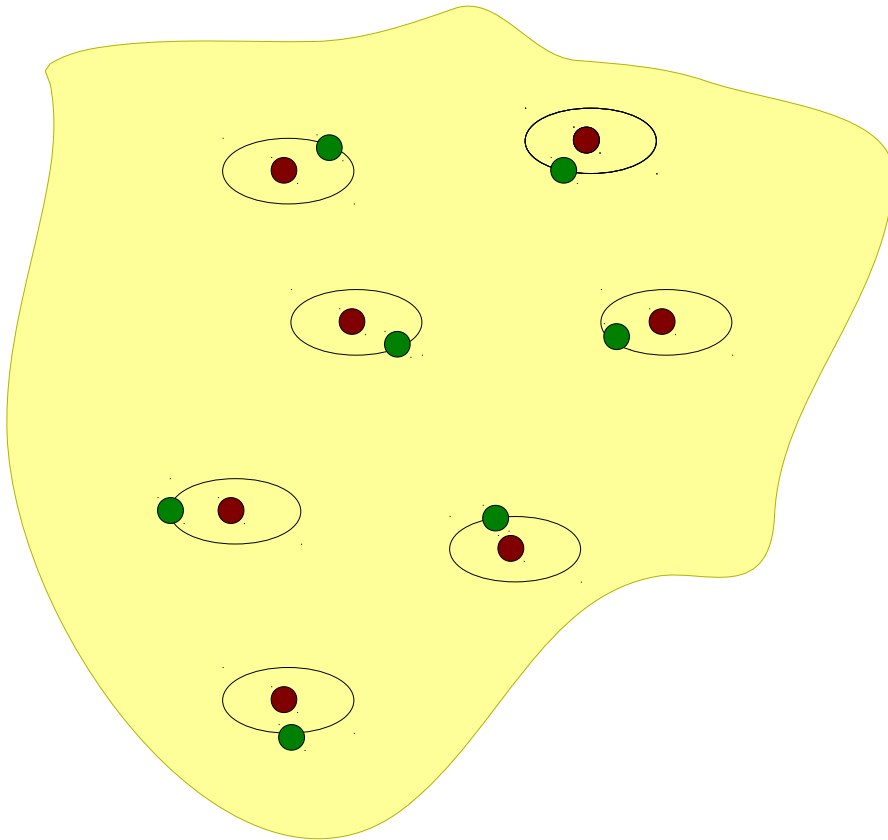
## Przewodniki



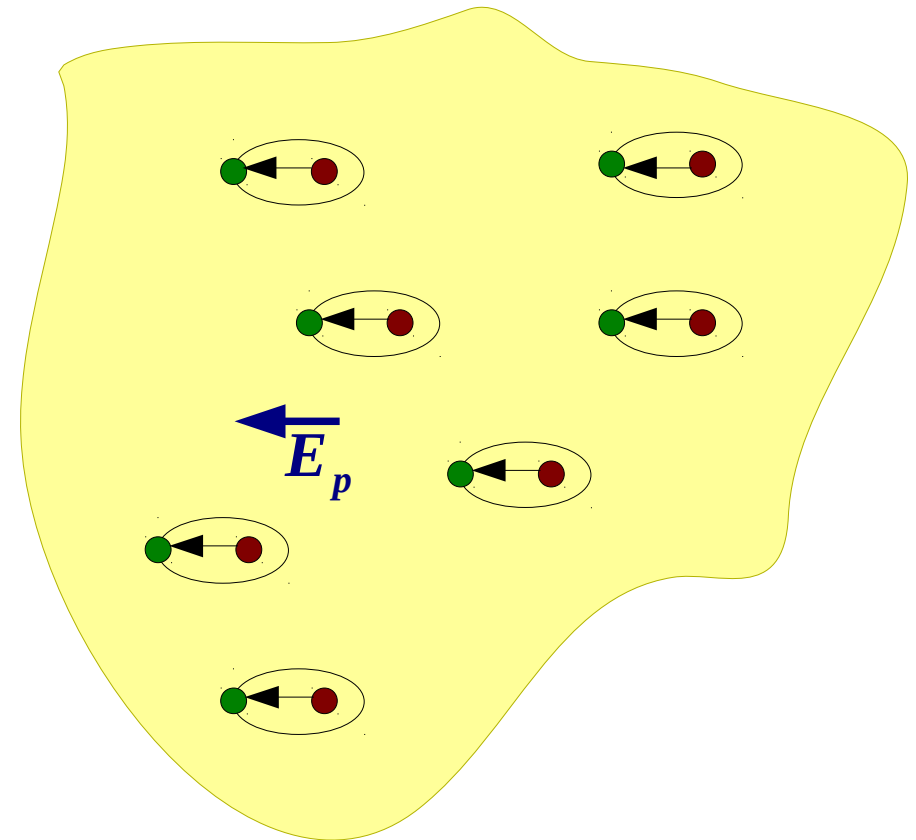
Ujemne i dodatnie ładunki mogą się rozdzielać tworząc ruchomy ładunek.

# Dielektryki: polaryzacja

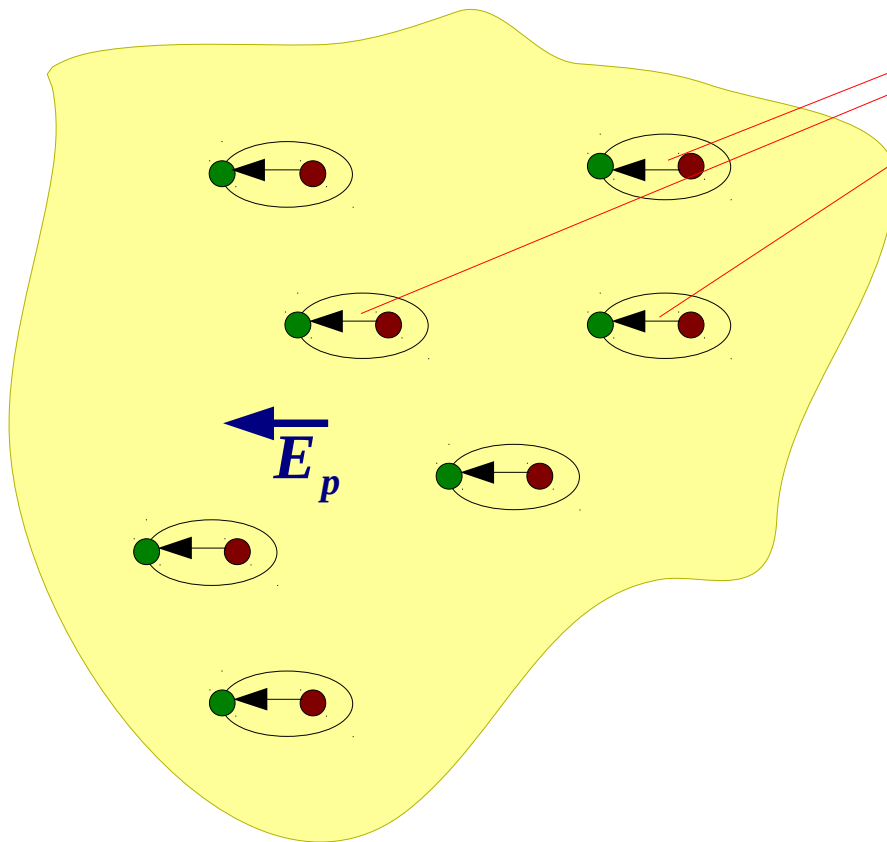
$E = 0$



$E \neq 0$



# Dielektryki: polaryzacja



$$P = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sum p_i}{v}$$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$D = \epsilon E$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \kappa) \epsilon_0$$

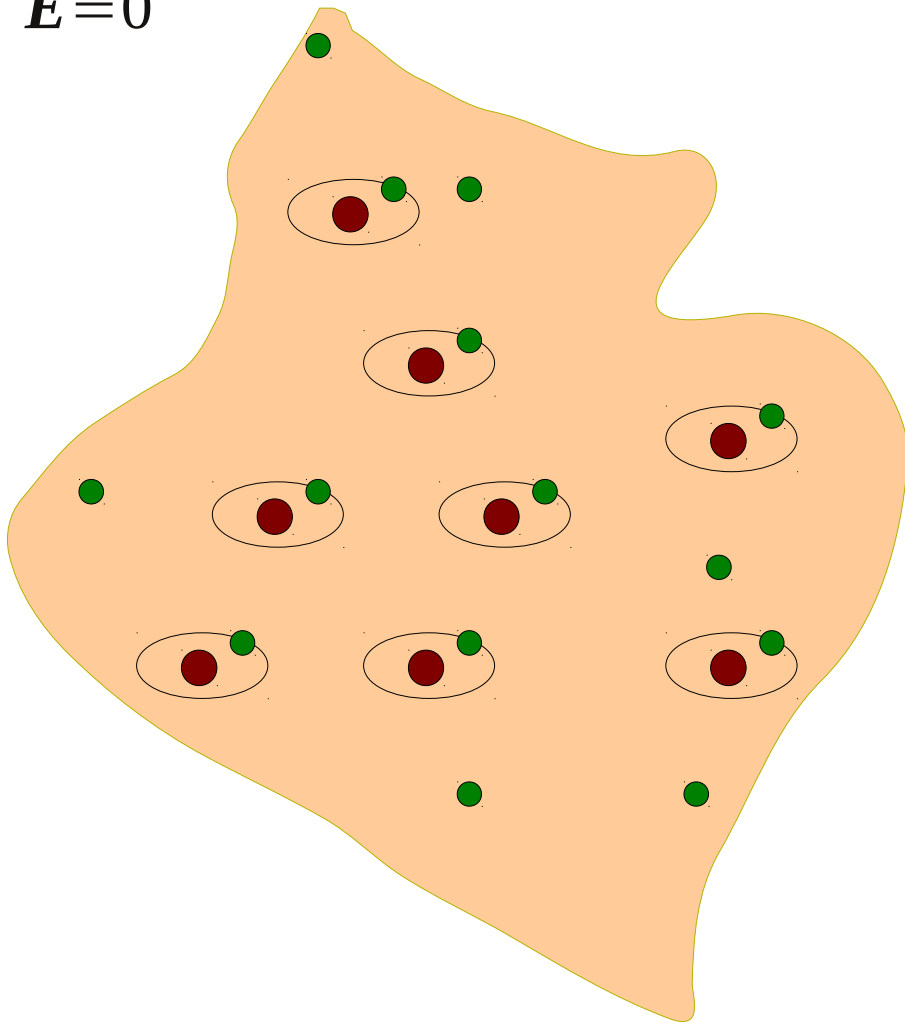
$$\epsilon_r \in \langle 1, 150 \rangle$$

Podatność elektryczna

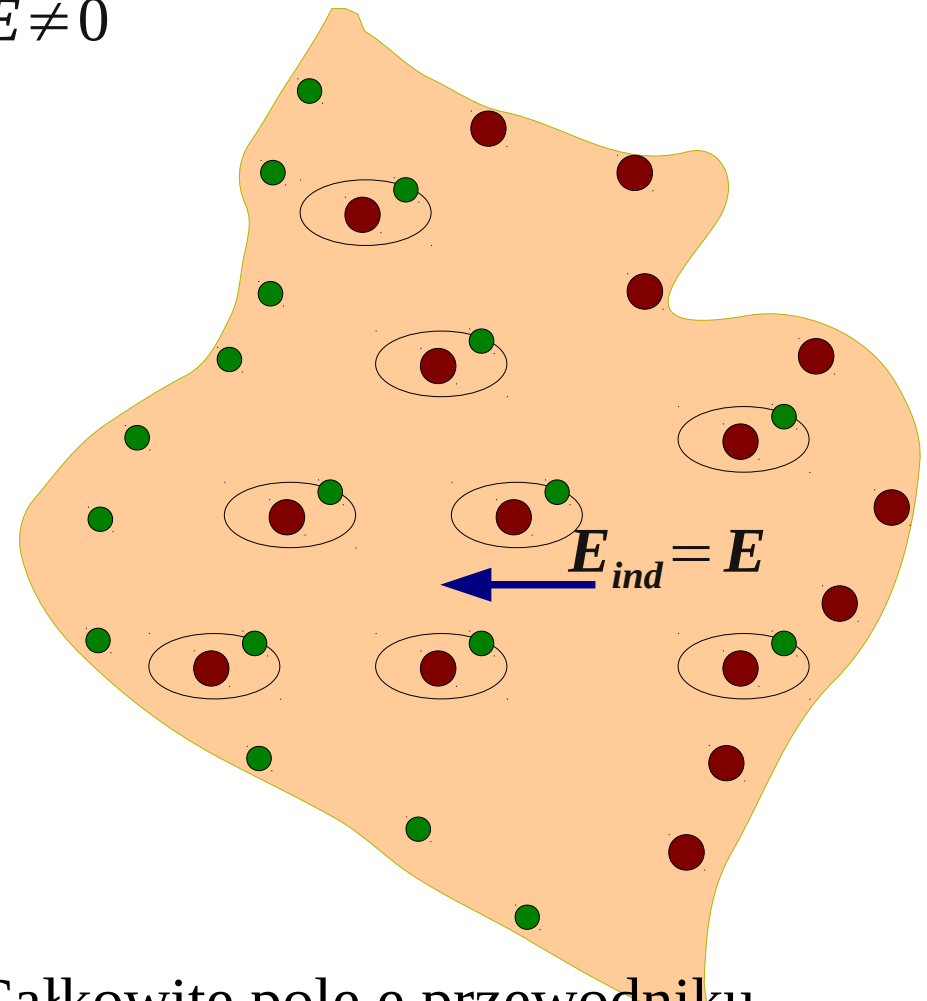
Sprężone polimery do  $10^5$

# Indukcja elektryczna w przewodnikach

$$E = 0$$



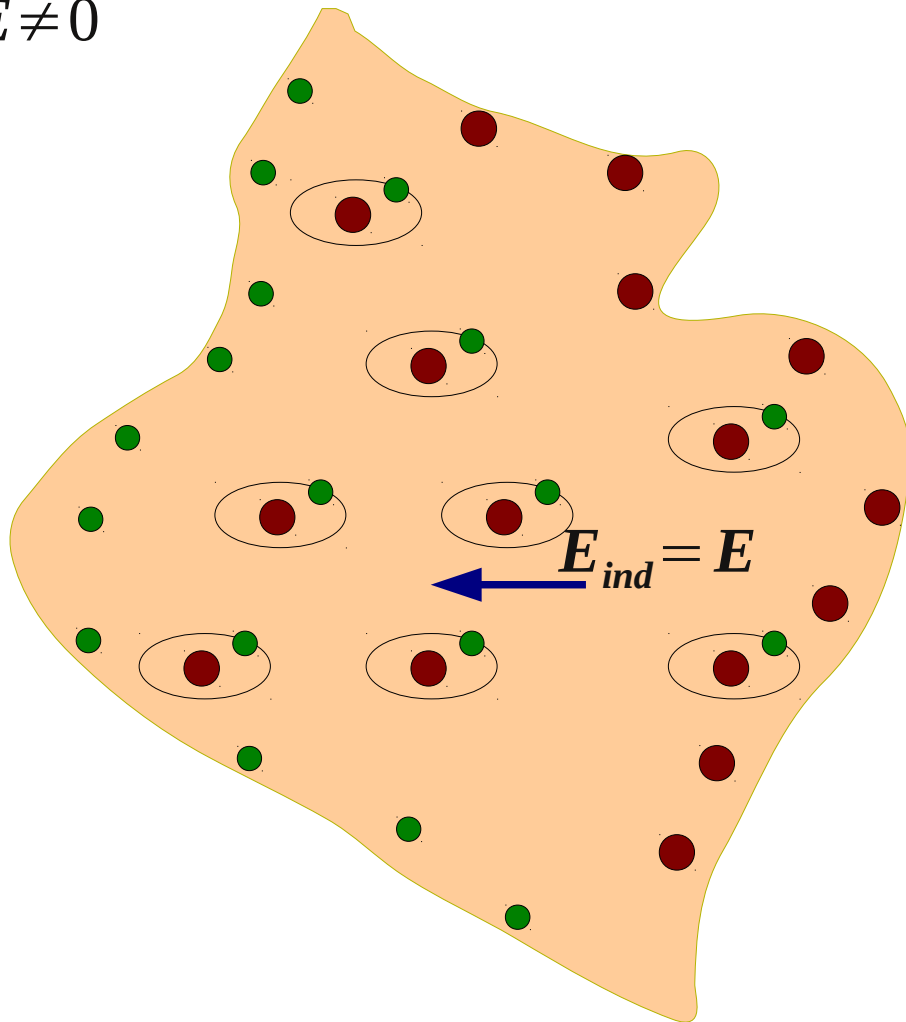
$$\vec{E} \neq 0$$



Całkowite pole e przewodniku  
jest równe zero!

# Zjawisko indukcji w przewodnikach

$\vec{E} \neq 0$



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{d\rho}{dt} & \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \epsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right)$$

$$\nabla \cdot \left( \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) = 0$$

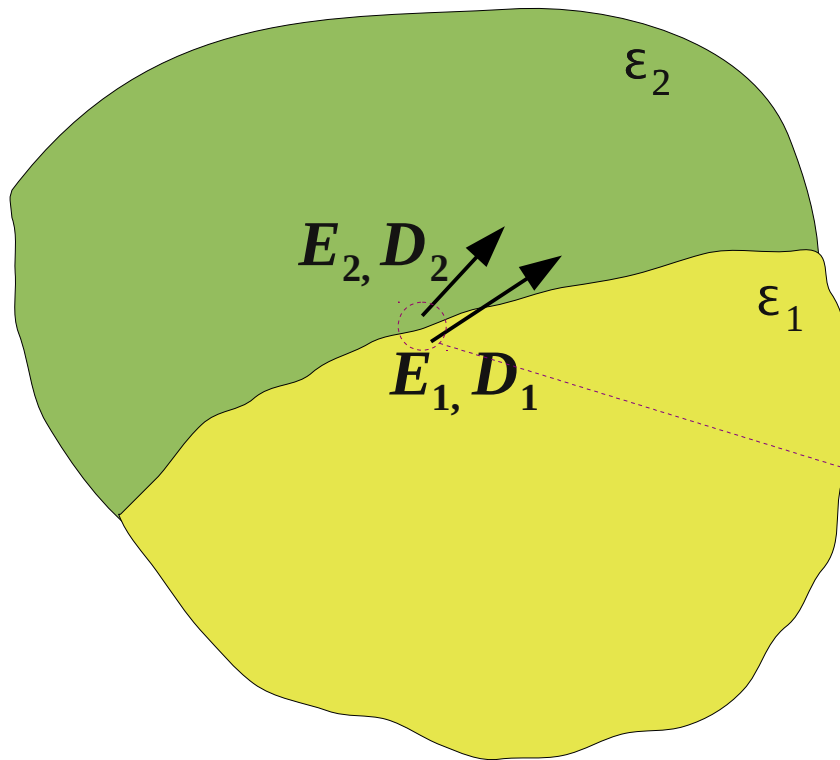
$$\mathbf{E} + \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

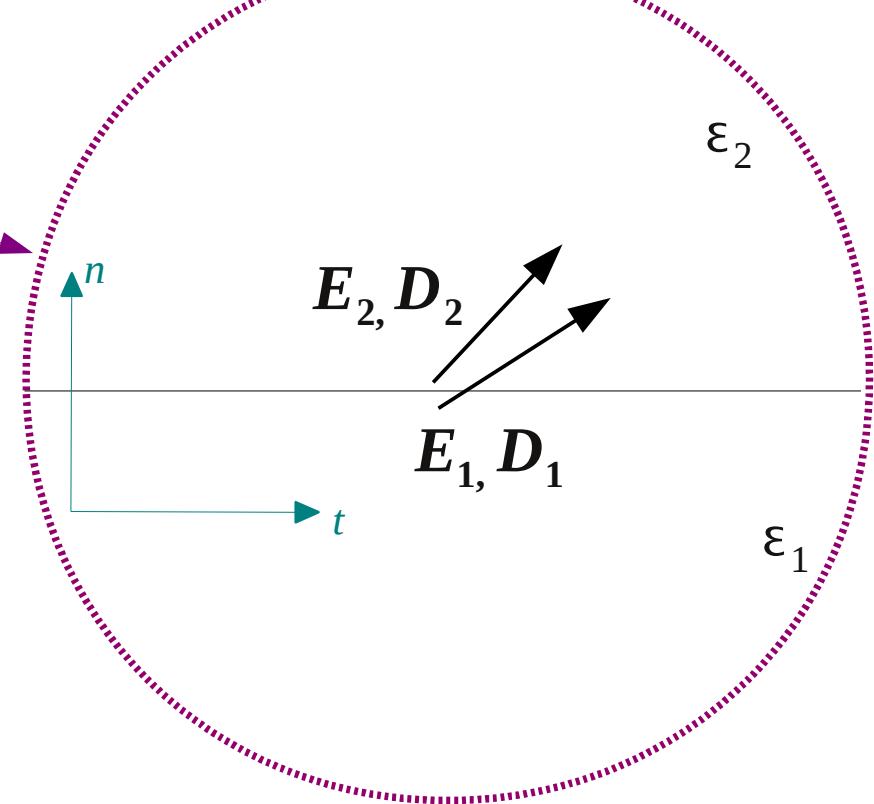
Dla miedzi ( $\epsilon=8.885e-12$ ,  $\sigma=57e6$ )  $\tau=0.155e-18$  s



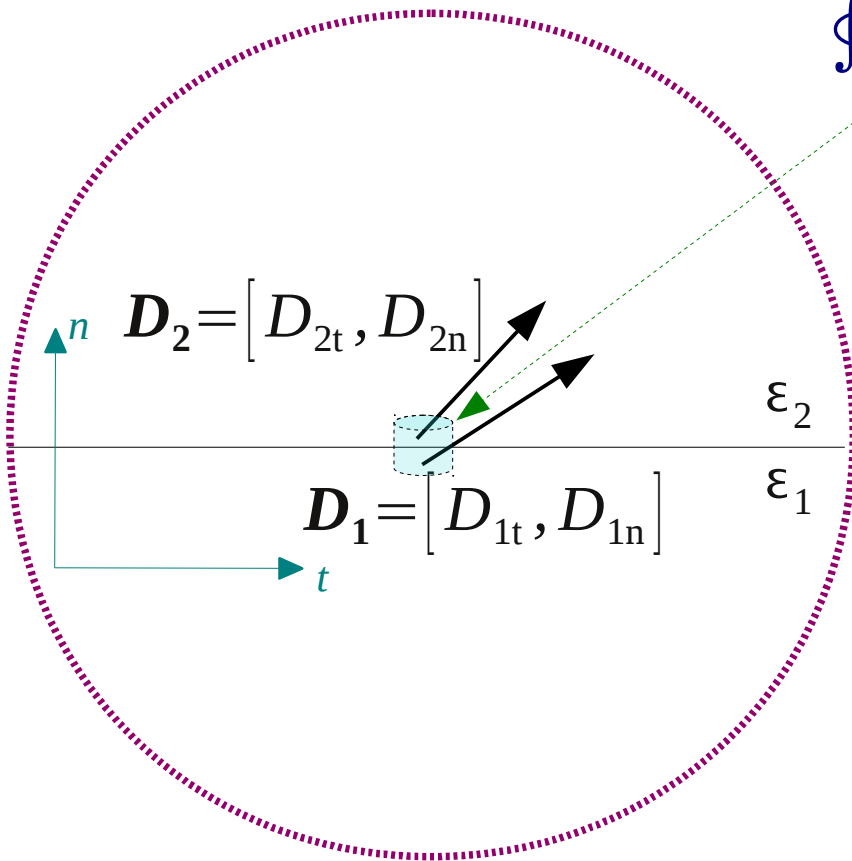
# Warunki ciągłości pola



Lokalny układ współrzędnych



# Warunki graniczne dla $D$



$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = \sum Q$$

$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = \int_{top} D_{2n} ds + \int_{side2} D_{2t} ds + \int_{side1} D_{1t} ds - \int_{bottom} D_{1n} ds$$

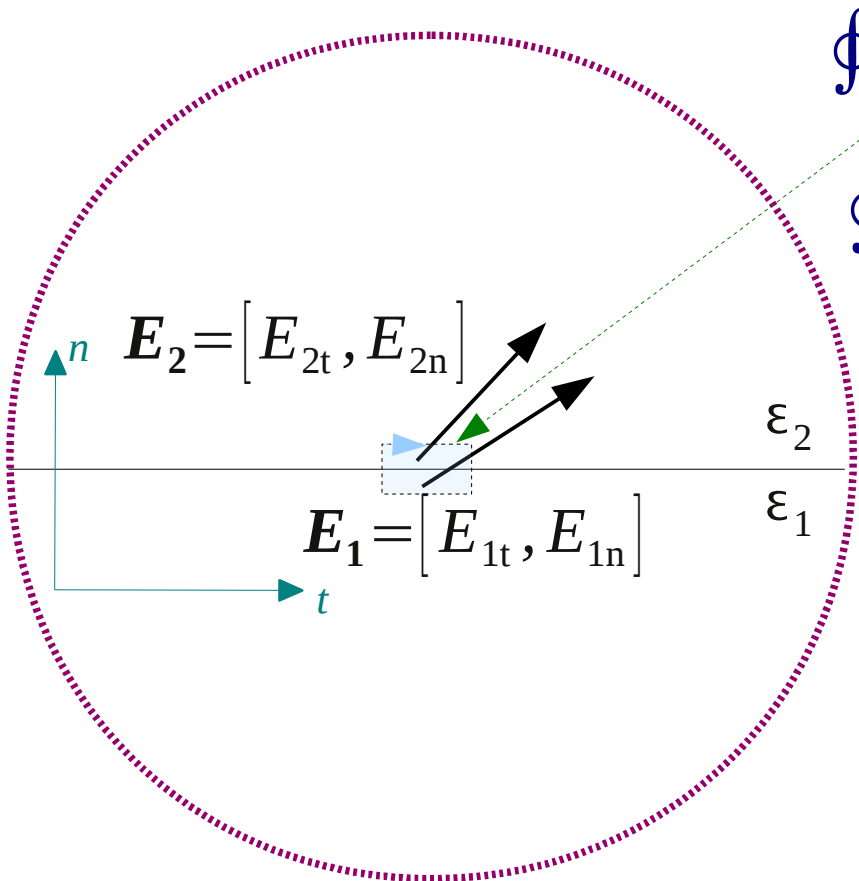
$$\int_{side2} D_{2t} ds = 0 \quad \int_{side1} D_{1t} ds = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = \int_{top} D_{2n} ds - \int_{bottom} D_{1n} ds \simeq \pi r^2 (D_{2n} - D_{1n})$$

$$\sum Q \simeq \pi r^2 \tau$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \tau$$

# Warunki graniczne dla $E$



$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = & \int_{\text{top}} E_{2t} dt - \int_{\text{bottom}} E_{1t} dt - \\ & + \int_{\text{right2}} E_{2n} dn - \int_{\text{right1}} E_{1n} dn + \\ & + \int_{\text{left1}} E_{1n} dn + \int_{\text{left2}} E_{2n} dn \end{aligned}$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{\text{top}} E_{2t} dt - \int_{\text{bottom}} E_{1t} dt = 0$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

# Wracamy do równań Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

Tylko pole elektryczne,  
niezmienne w czasie.

Interesują nas zjawiska w otoczeniu ładunków  
nieruchomych lub poruszających się bardzo wolno.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Możemy zastąpić wektor  
polem skalarnym !!

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

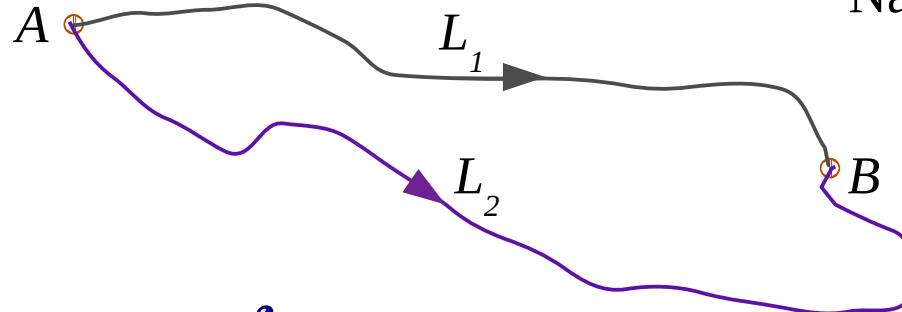
# Skalarny potencjał elektryczny

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

Potencjał możemy wyliczyć jako całkę liniową wektora  $\mathbf{E}$ :

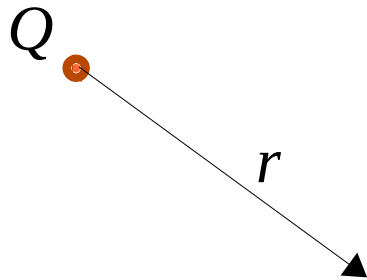
$$\varphi(P) = -\int_{ref}^P \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

gdzie  $ref$  to punkt, w którym  $\varphi = 0$ .



$$\int_{L_1} \mathbf{E} d\mathbf{L} = \int_{L_2} \mathbf{E} d\mathbf{L} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Potencjał Coulomba



$$\varphi(r) = k \frac{Q}{r}$$

Praca w polu E

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = q \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = q U_{AB}$$

Energia potencjalna

Napięcie

# Równania Laplace'a i Poissone'a

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\mathbf{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) = -\rho$$

$$\varepsilon = \text{const}$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\rho = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$$

Równanie Poissone'a

Równanie Laplace'a

Matematyka: Laplasjan (operator Laplace'a)

$$\nabla \cdot \nabla ( ) = \nabla^2 ( ) = \Delta ( )$$

W różnych UW

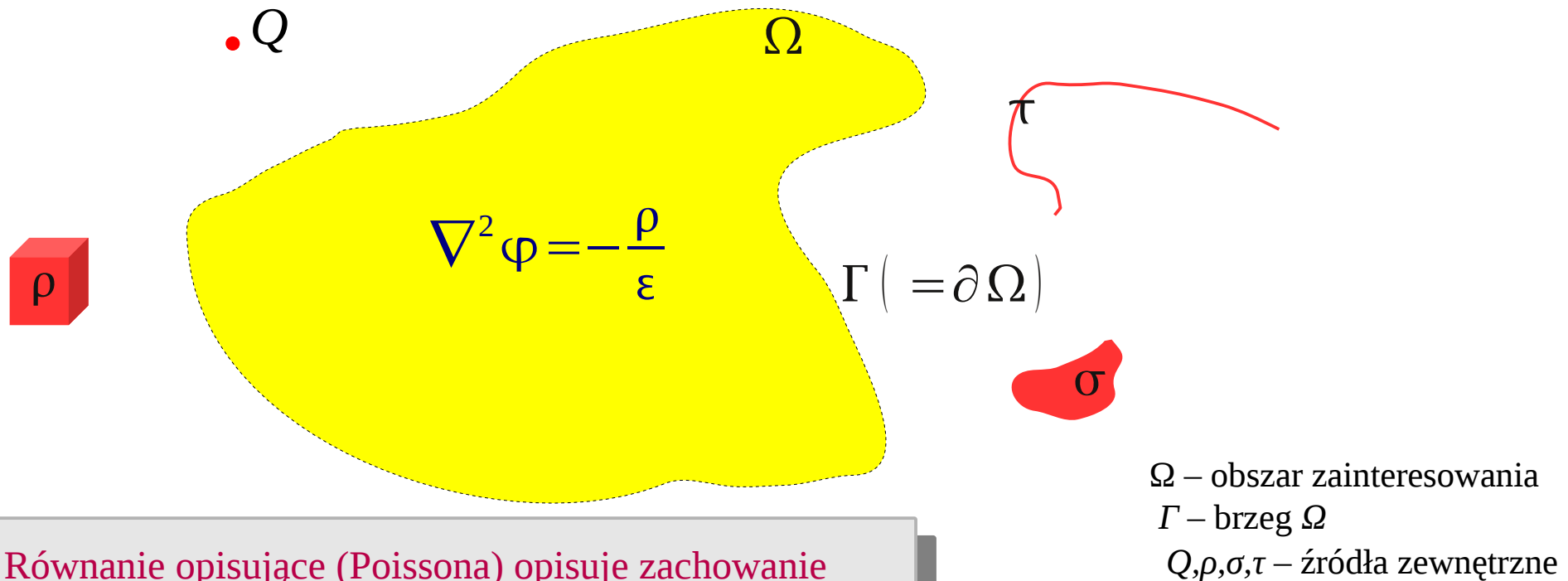
Kartezjański  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Walcowy  $\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Sferyczny  $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Laplasjan to suma pochodnych cząstkowych i dlatego równania typu L lub P nazywamy cząstkowymi równaniami różniczkowymi.

# Rozwiązywanie CRR?



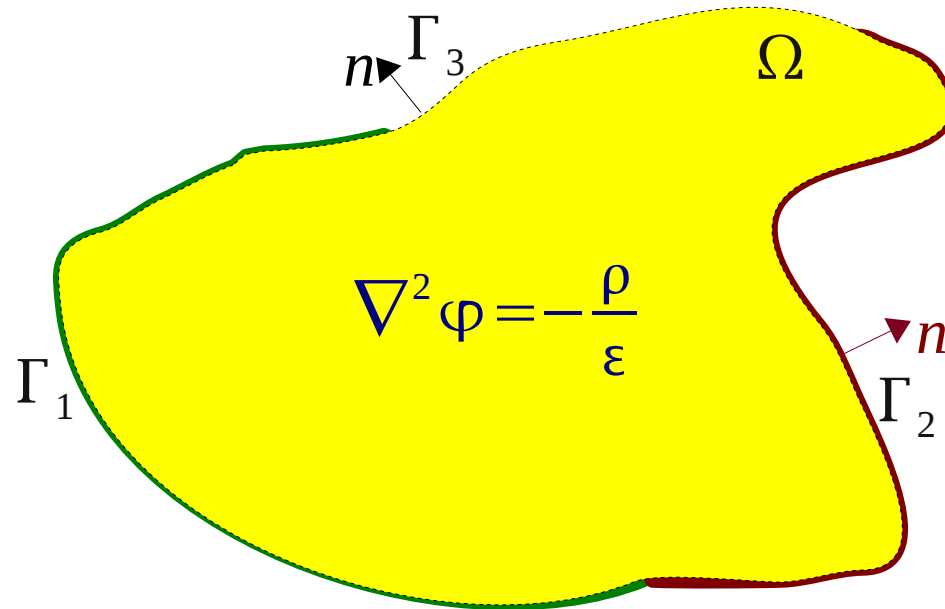
Równanie opisujące (Poissona) opisuje zachowanie pola w danym punkcie.

Pozwala opisać relację pomiędzy polem w sąsiednich punktach, ale nie umożliwia wyznaczenia wartości pola, jeśli nie znamy wszystkich źródeł..

Jeśli ograniczamy analizę do obszaru  $\Omega$ , to musimy określić na  $\Gamma$  pewne warunki dla  $\varphi$  lub jego pochodnych.

# Zagadnienia brzegowe

Zagadnienie brzegowe = równanie opisujące + warunki brzegowe



$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

Rodzaje warunków brzegowych (wybór):

1) Dirichleta (1-go rodzaju):  $\varphi = u \quad \text{on} \quad \Gamma_1$

2) Neumanna (2-go rodzaju):  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = q \quad \text{on} \quad \Gamma_2$

3) Robina (3-go rodzaju):  $a\varphi + b \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v \quad \text{on} \quad \Gamma_3$



# Przykład: pole naładowanego cylindra

Źródło – nieskończenie długi cylinder o promieniu  $R$  naładowany ładunkiem o gęstości  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>]

$r$       $\varphi(r) = ?$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{d\varphi_1(r)}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad r < R$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{d\varphi_1(r)}{dr} \right) = 0 \quad r \geq R$$

Po dwukrotnym całkowaniu

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + A_1 \ln(r) + B_1 \quad r < R$$

$$\varphi_2(r) = A_2 \ln(r) + B_2 \quad r \geq R$$

Na osi cylindra potencjał pow. mieć skończoną wart. ( $r=0$ ):

$$A_1 = 0, \quad \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + B_1 \quad r < R$$

# Przykład: pole naładowanego cylindra (c.d.)

Źródło – nieskończenie długi cylinder o promieniu  $R$  naładowany ładunkiem o gęstości  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>]

$r$        $\varphi(r) = ?$

Wygodniej, gdy potencjał jest ciągły:

$$\varphi_1(r) = \varphi_2(r) \quad r = R$$

$$-\frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 + B_1 = A_2 \ln(R) + B_2$$

$$B_2 = B_1 - \frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 - A_2 \ln(R)$$

Indukcja elektryczna  $\mathbf{D}$  musi być ciągła:

$$\epsilon_0 \frac{d\varphi_1(r)}{dr} = \epsilon_0 \frac{d\varphi_2(r)}{dr} \quad r = R$$

$$-\frac{\rho}{2} R = \epsilon_0 \frac{A_2}{R} \rightarrow A_2 = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Eliminujemy  $B_2$ :

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + B_1 - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \quad r \geq R$$

# Przykład: pole naładowanego cylindra (c.d.)

Źródło – nieskończenie długi cylinder o promieniu  $R$  naładowany ładunkiem o gęstości  $\rho$  [ $C/m^3$ ]

$r$   $\varphi(r) = ?$

Wybór potencjału odniesienia:

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + B_1 \quad r < R$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + B_1 - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \quad r \geq R$$

Wygodnie byłoby przyjąć, że potencjał zanika w nieskończoności czyli  $\varphi(\infty) = 0$ , ale nie jest to możliwe, gdyż  $\ln(\infty) = \infty$ .

Innym szczególnym miejscem jest zewnętrzna pow. cylindra  $r = R$

Zadając

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = 0 \quad \rightarrow \quad B_1 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon}$$

otrzymamy

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad r < R$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad r \geq R$$