

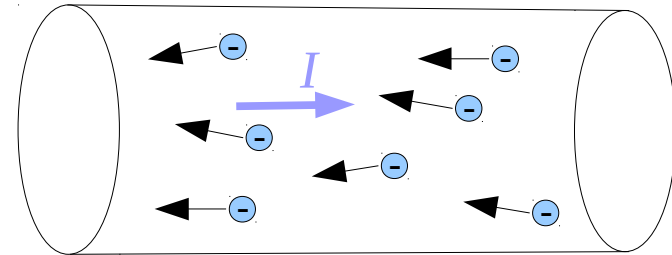
# Podstawy elektromagnetyzmu

## *Wykład 5*

# *Pole przepływowowe prądu stałego*

# Czym jest prąd elektryczny?

**Prąd elektryczny:** *uporządkowany ruch ładunku.*



## Prąd elektryczny w metalach

Lity metalowy przewodnik zawiera swobodne elektrony.

Pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego te swobodne elektrony zaczynają się poruszać (w zasadzie w kierunku siły od zewnętrznego pola), tworząc uporządkowany ruch, który nazywamy **prądem elektrycznym**.

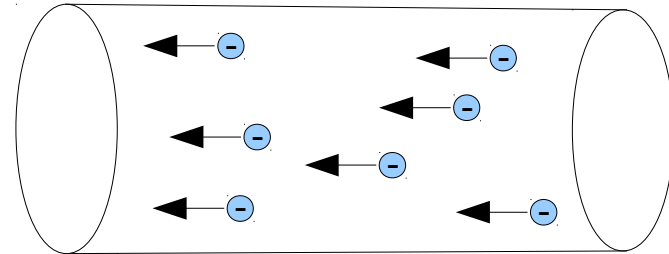
## Prąd elektryczny w innych materiałach

Prądem elektrycznym nazywamy ruch dowolnego rodzaju ładunków:

- jony dodatnie i ujemne
- "dziury" w półprzewodnikach

# Prędkość unoszenia

$$v = \frac{I}{n Q A}$$



$v$  - prędkość unoszenia

$I$  - natężenie prądu

$n$  - liczba ładunków (cząstek) w jednostce objętości

$Q$  - wartość pojedynczego ładunku

$A$  - powierzchnia przekroju przewodnika

## Przykład:

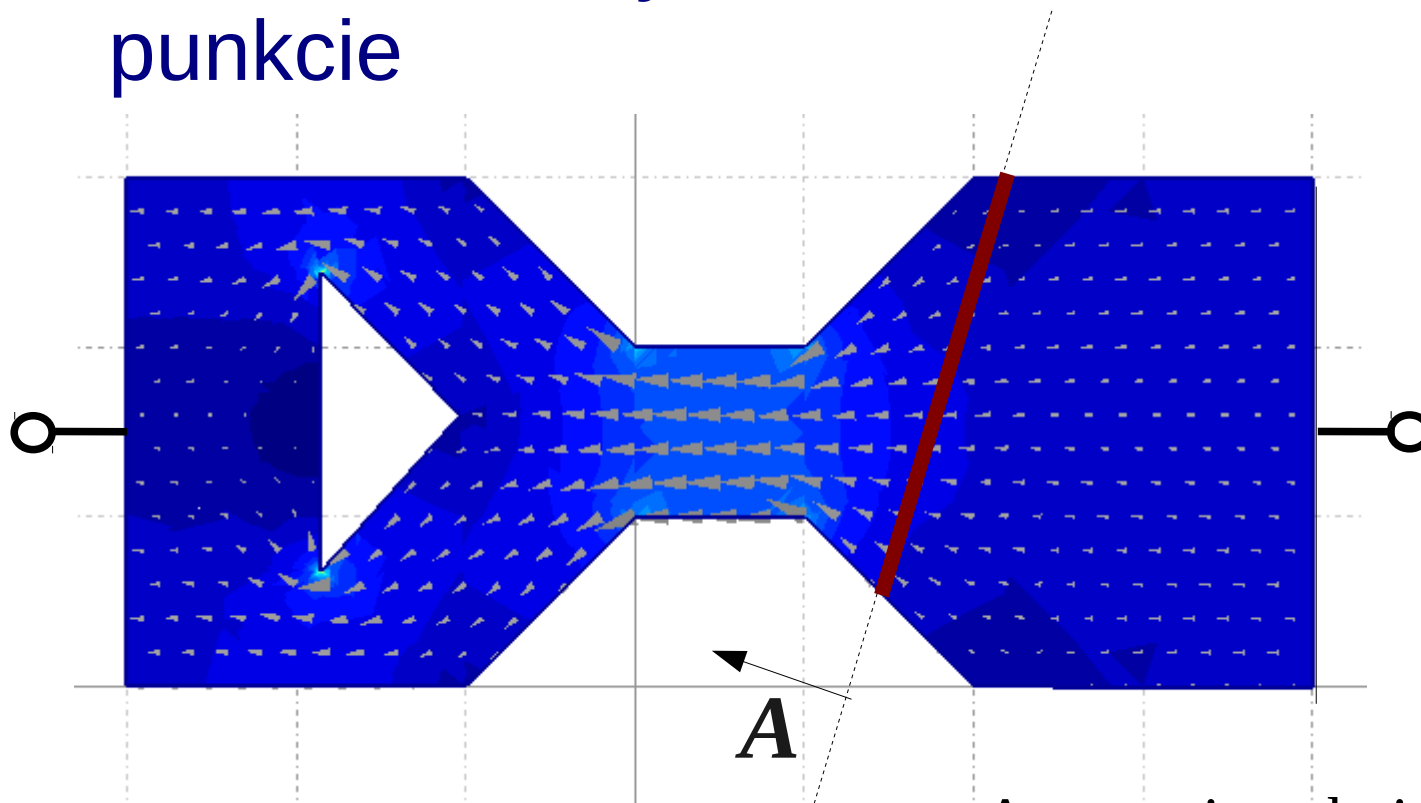
Prąd o natężeniu 3 A w miedzianym przewodzie o średnicy 1mm.

Prędkość unoszenia to: **0.28 [mm/s]** czyli **1.0 [m/h]**.

Założenia:  $n=8.5e28[1/m^3]$ ,  $Q=1.6e-19[C]$ ,  $A= 7.85e-7[m^2]$

# Natężenie prądu

Natężenie prądu to wektor, którego moduł określa intensywność ruchu ładunku w danym punkcie



$$J = \frac{I}{A}$$

$$I = \int J \cdot dA$$

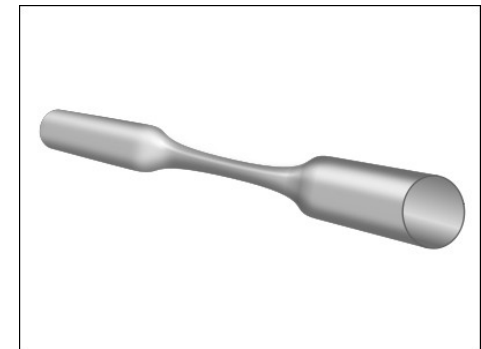
A – powierzchnia przekroju

# Analogia do przepływu cieczy

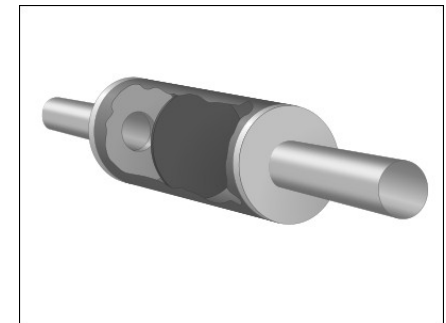
## Przepływ ładunku przypomina przepływ wody

Ładunek elektryczny	Cząsteczka wody
Przewodnik	Rura/kanal
Potencjał elektryczny	Ciśnienie / Wys. słupa cieczy
Napięcie	Różnica ciśnień / wys. Słupa cieczy
Prąd	Przepływ

Wodny rezystor



Wodny kondensator



# Źródła prądu

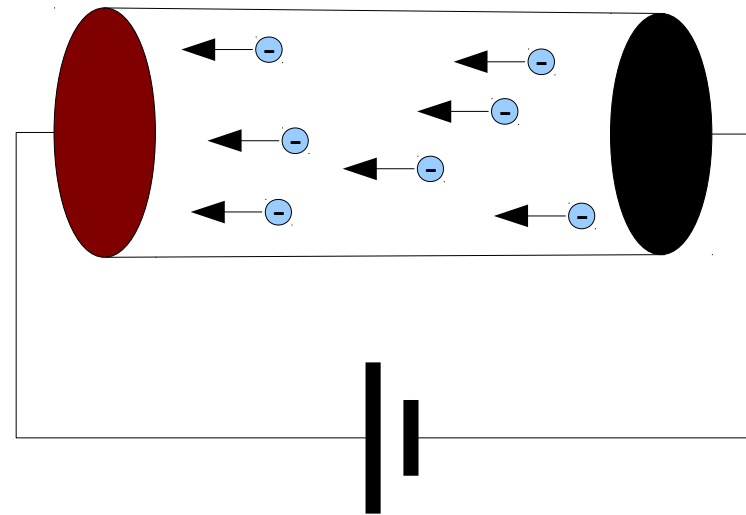
Prąd (ruch ładunku) jest spowodowany polem elektrycznym.

Gęstość prądu

Natężenie pola

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

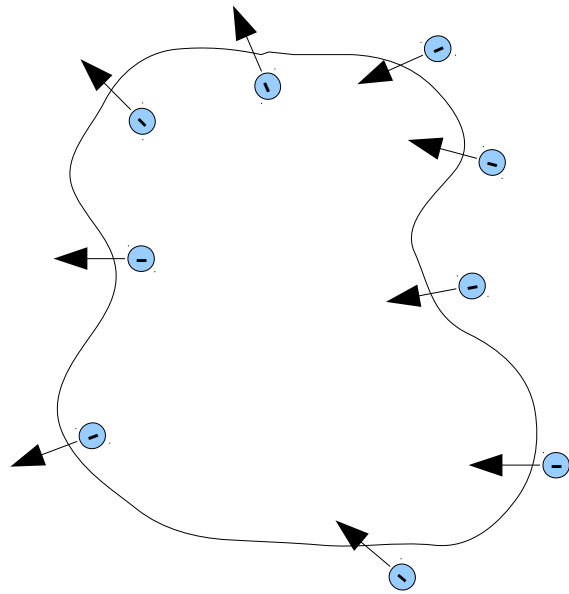
Współczynnik materiałowy  
(przewodność)



# Źródła prądu

Strumień przez zamkniętą powierzchnię = 0.

Jest to prawdziwe dla większości „zwykłych” obwodów.



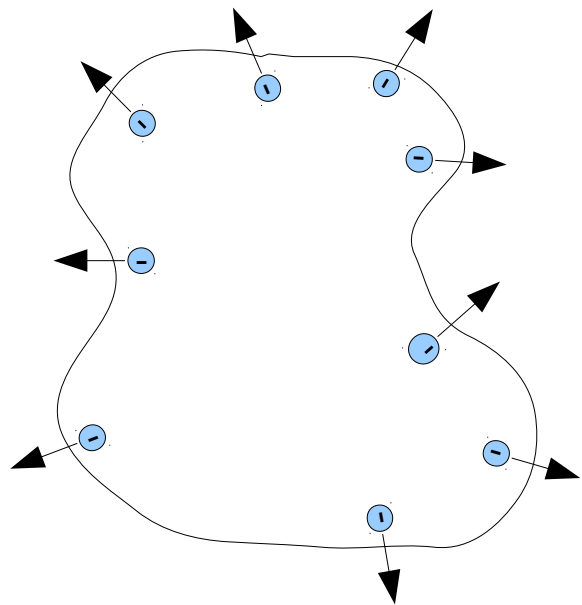
$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Stała liczba ładunków w obszarze.

# Źródła prądu

Ładunek może być „generowany” --  
wpompowywany do obszaru z x-wymiaru.



$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ładunek w obszarze się zmienia.



# Pole i „obwody elektryczne”

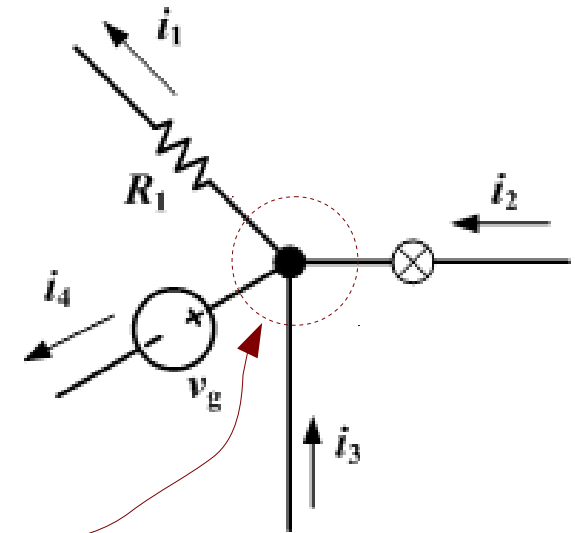
- Pierwsze prawo Kirchoffa

Suma prądów w węźle jest równa zero.

Teoria obwodów: 
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Teoria pola: 
$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$



# Pole i „obwody elektryczne”

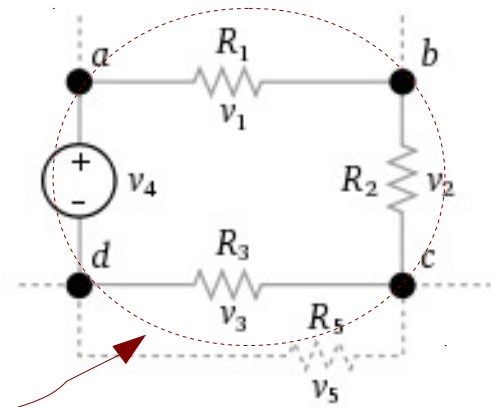
- Drugie prawo Kirchoffa

Suma napięć w oczku jest równa zero.

Teoria obwodów: 
$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

Teoria pola: 
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$



# Prawo Ohma

- Prawo Ohma

Prąd w przewodniku jest wprost proporcjonalny do napięcia i odwrotnie proporcjonalny do rezystancji.

$$I = \frac{U}{R}$$

## Teoria obwodów:

Rezystancja to właściwość obiektu (rezystora).  
Zależy od: wielkości, kształtu, struktury, materiałów.

$$R = \frac{U}{I}$$

## Teoria pola:

Przewodność  $\sigma$  właściwość materiału.  
Jest związana z „punktem”, a nie obiektem.  
Nie zależy od wielkości, kształtu, itp.

$$J = \sigma E$$

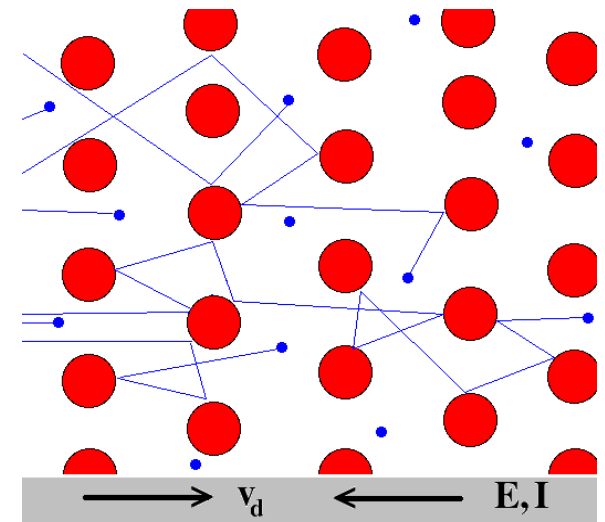
$$J = \frac{E}{\rho_r}$$

# Przewodność

- Można powiedzieć, że przewodność to zdolność materiału do przewodzenia prądu elektrycznego.
- Przewodność zależy od:
  - Liczby swobodnych ładunków,
  - Liczby kolizji.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

- Oporność = 1 / Przewodność



# Wartość przewodności

**Przewodność wyrażamy w**  
[siemensach na metr] [S/m]

Przewodniki	Materiały słabo przewodzące	Izolatory
Srebro = $6.3 \cdot 10^7$	Woda morską = 4.8	Woda destylowana = $5.5 \cdot 10^{-6}$
Miedź = $5.7 \cdot 10^7$	Woda pitna = 0.005	Powietrze = $5 \cdot 10^{-13}$
Aluminium = $3.5 \cdot 10^7$	Tkanki żywe = 1	Heksan = $1 \cdot 10^{-14}$
Żelazo = $3.5 \cdot 10^6$	Kości = 0.01	SF <sub>6</sub> = $1.5 \cdot 10^{-13}$

**Rezystywność**  
[ohm metr] [ $\Omega$  m]

# Opis matematyczny

Pole przepływowe i elektrostatyczne są fizycznie inne, ale ich opis matematyczny jest bardzo podobny.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

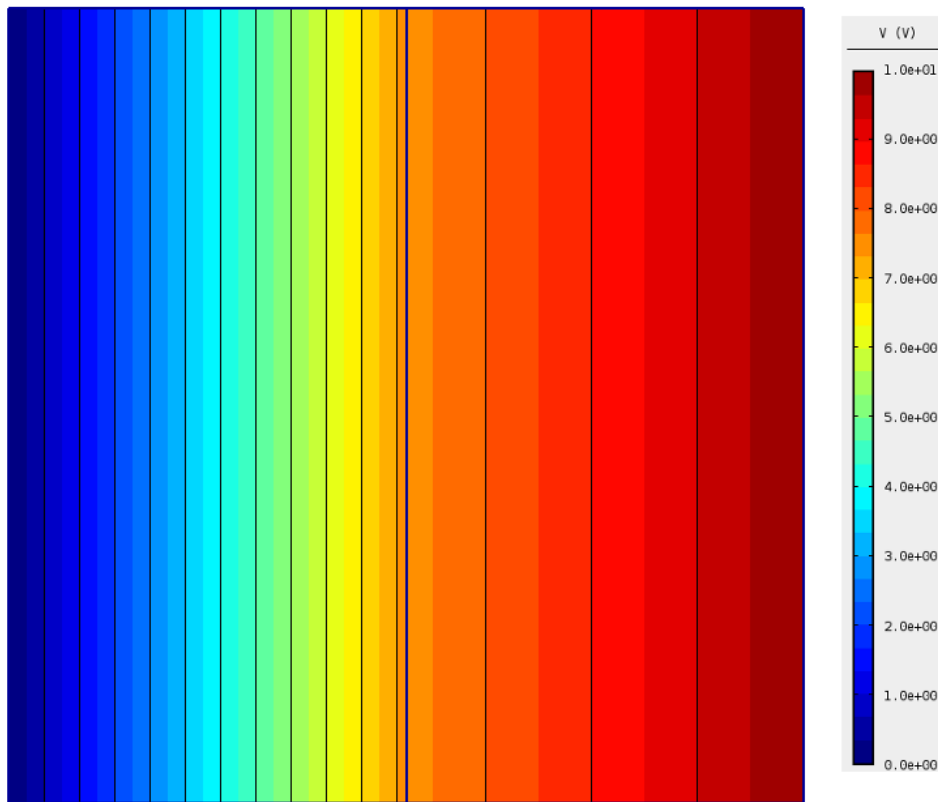
$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

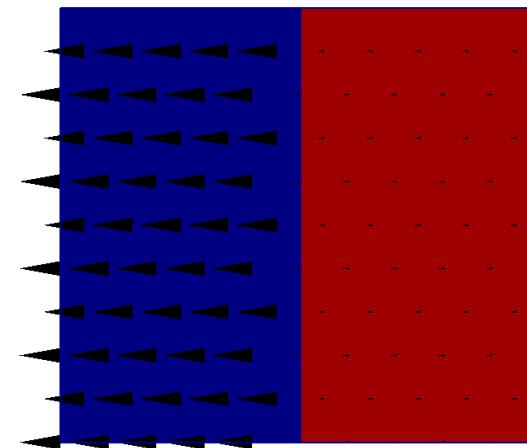
$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Równanie Poissone'a

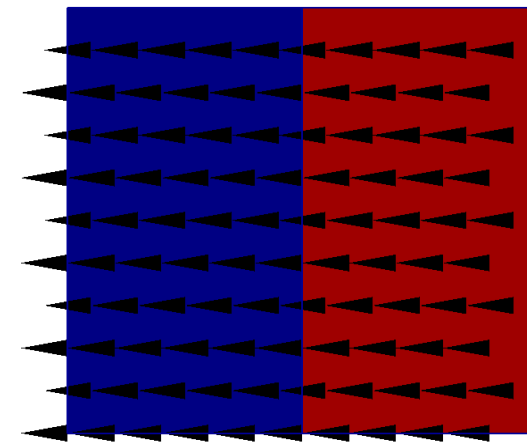
# Rezystor dwuwarstwowy



Skalarny potencjał elektryczny



Natężenie pola

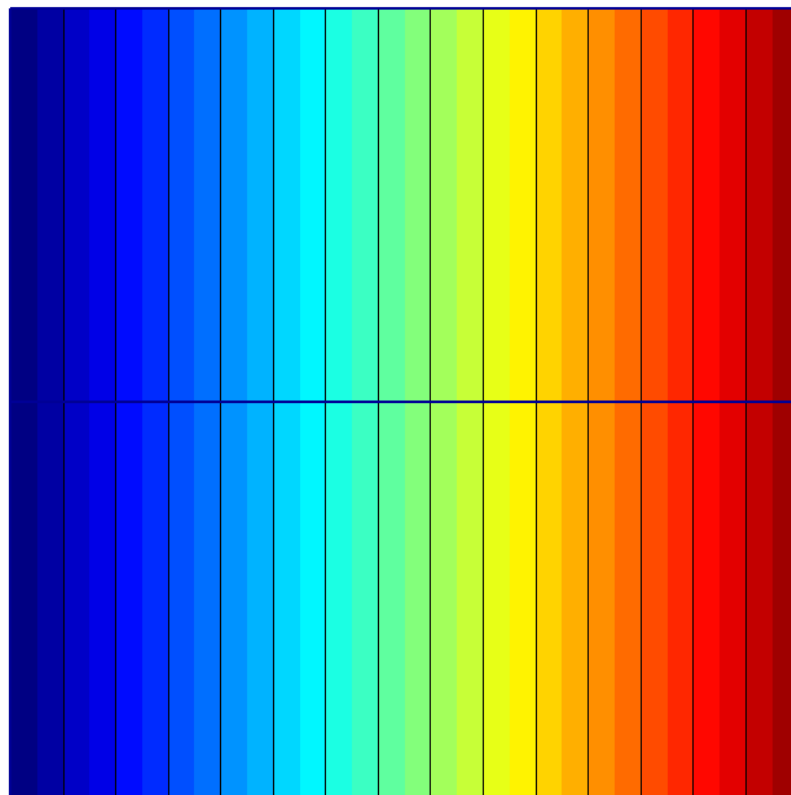


Gęstość prądu

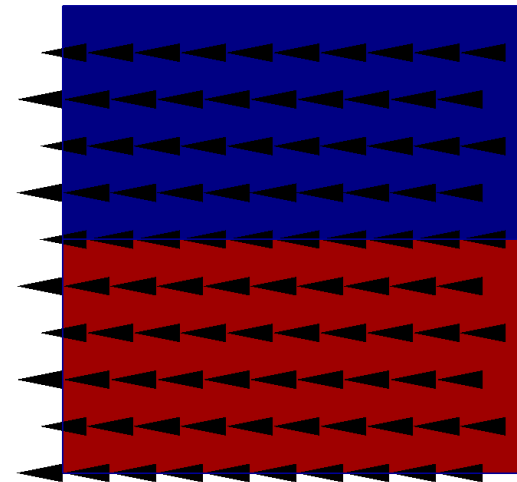
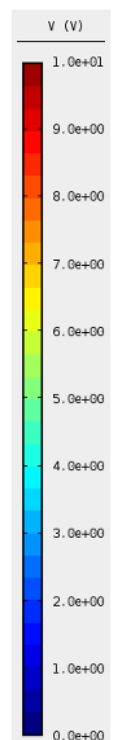
$$J_n = const$$



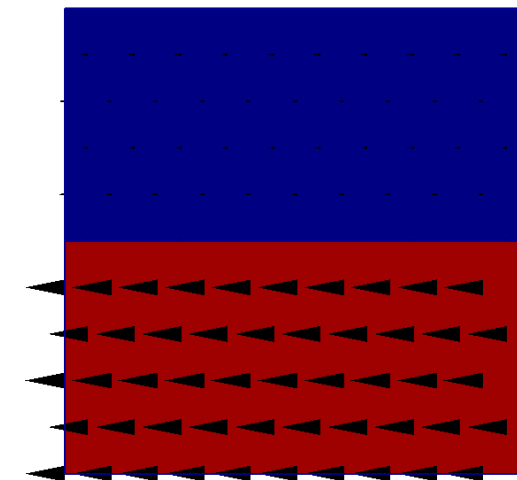
# Równoległe połączenie materiałów o różnej przewodności



Potencjał elektryczny



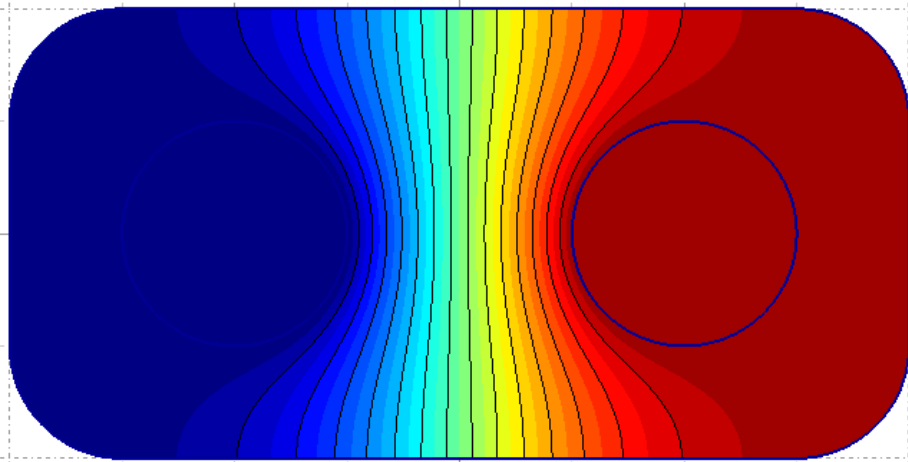
Natężenie pola



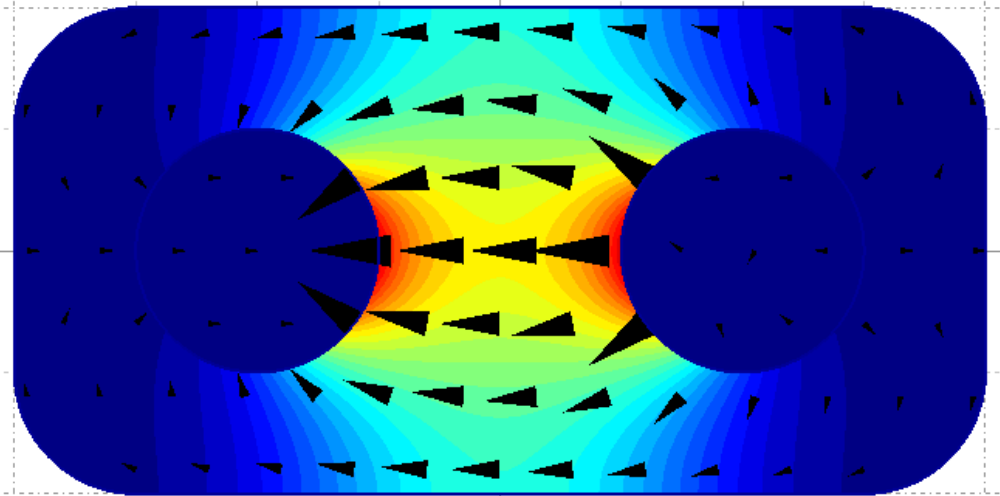
Gęstość prądu



# Przepływ prądu



Rozkład potencjału w otoczeniu dwóch elektrod



Odpowiedni rozpływ prądu

# Wyznaczanie rezystancji

## Połączenie szeregowo

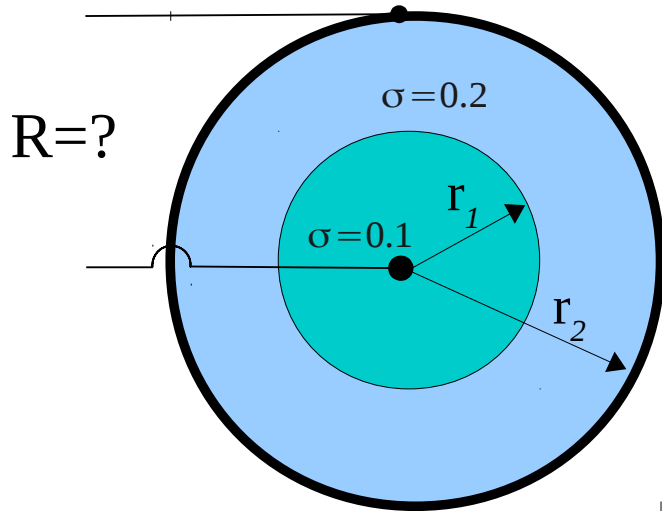
1. Zadaj  $I$
2. Wyznacz  $J$
3. Oblicz  $E$
4. Oblicz napięcie  $U$
5.  $R = \frac{U}{I}$

## Połączenie równoległe

1. Zadaj  $U$
2. Wyznacz  $E$
3. Oblicz  $J$
4. Oblicz prąd:  $I$
5.  $R = \frac{U}{I}$

# Przykłady

## Rezystor kulisty



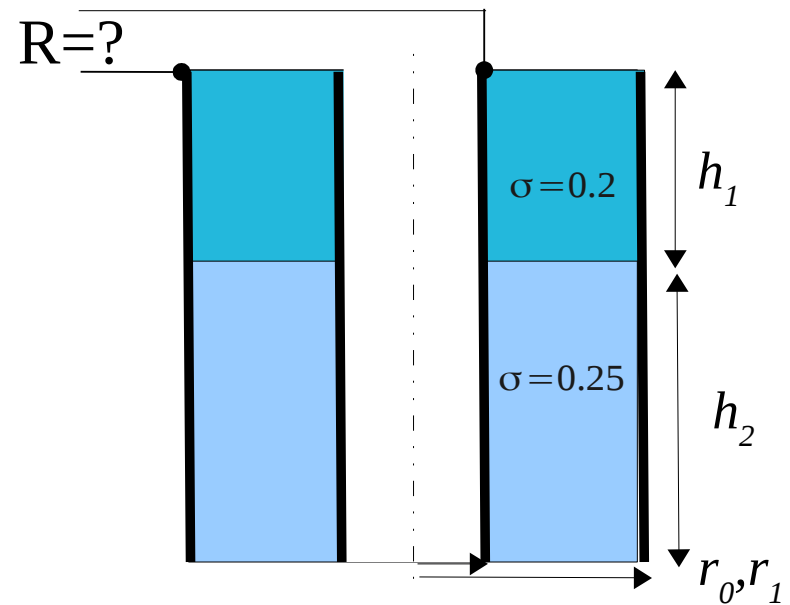
$$I = 1 \text{ A} \rightarrow J(r) = 1 / (4 \pi r^2) \rightarrow E(r) = 1 / (4 \pi r^2 \sigma)$$

$$U = \int_{r_0}^{r_2} E(r) dr = 1 / (4 \pi) \int_{r_0}^{r_1} (10 / r^2) dr + \int_{r_1}^{r_2} (5 / r^2) dr$$

$$U = 5 / (4 \pi) (2(r_1 - r_0) / (r_1 r_0) + (r_2 - r_1) / (r_2 r_1))$$

$$R = U / 1$$

## Rezystor walcowy



$$U = 1 \text{ V} \Leftrightarrow \int_{r_0}^{r_1} E(r) dr = 1 \text{ V} \quad \left| \Rightarrow a = 1 / \ln(r_1 / r_0) \right.$$

$$E(r) = a / r \Rightarrow U = a \ln(r_1 / r_0)$$

$$E(r) = 1 / (r \ln(r_1 / r_0)) \Rightarrow E(r_1) = 1 / (r_1 \ln(r_1 / r_0))$$

$$I_1 = 2 \pi r_1 h_1 \cdot 0.2 / (r_1 \ln(r_1 / r_0)) = (0.4 \pi h_1) / (\ln(r_1 / r_0))$$

$$I_2 = 2 \pi r_1 h_2 \cdot 0.25 / (r_1 \ln(r_1 / r_0)) = (0.5 \pi h_2) / (\ln(r_1 / r_0))$$

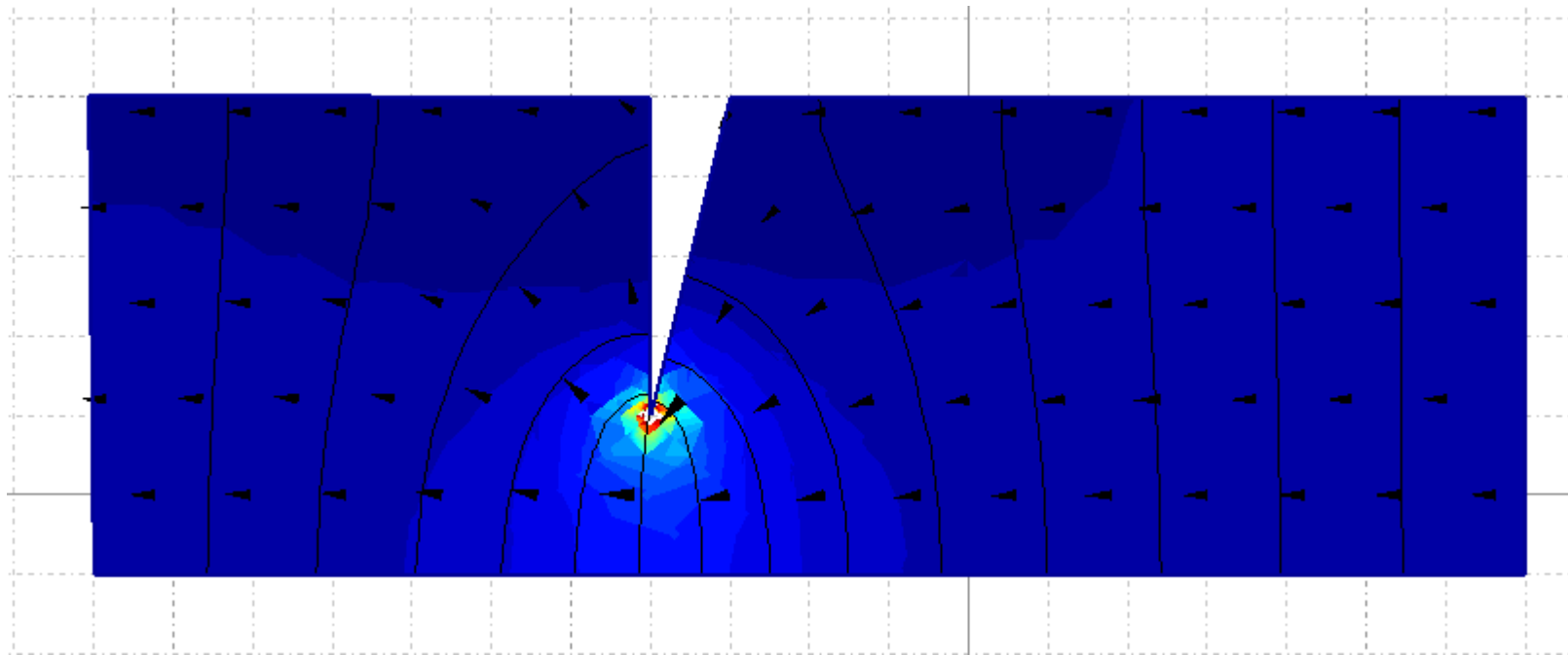
$$R = 1 / (I_1 + I_2)$$

# Gęstość mocy

- Przepływ prądu wiąże się z zamianą energii elektrycznej w ciepło
  - Gęstość strat mocy [W/m<sup>3</sup>]  $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$
  - Straty w objętości
- Całkowita moc strat [W]  $P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = U I$
- Straty w rezystancji:  $P = \left( \frac{U}{l} \frac{I}{A} \right) l A = U I$

# Uszkodzenie przewodu

Dlaczego może być przyczyną pożaru?



Gęstość mocy strat [W/m<sup>3</sup>]